



Faculteit Wetenschappen  
Vakgroep Toegepaste Wiskunde, Informatica en Statistiek

# Grenzen voor het aantal Hamiltoniaanse cykels in triangulaties

Annelies Cuvelier

Promotor: prof. dr. Gunnar Brinkmann

Copromotor: dr. Nicolas Van Cleemput

Masterproef ingediend tot het behalen van de academische graad van master in de  
wiskunde, afstudeerrichting zuivere wiskunde.

2014-2015





Faculteit Wetenschappen  
Vakgroep Toegepaste Wiskunde, Informatica en Statistiek

# Grenzen voor het aantal Hamiltoniaanse cykels in triangulaties

Annelies Cuvelier

Promotor: prof. dr. Gunnar Brinkmann

Copromotor: dr. Nicolas Van Cleemput

Masterproef ingediend tot het behalen van de academische graad van master in de  
wiskunde, afstudeerrichting zuivere wiskunde.

2014-2015

# Voorwoord

Reeds in het tweede bachelorjaar was ik geïnteresseerd in grafen. Mijn bachelorproef lag dan ook in deze lijn.

Toen vorig academiejaar de lijst met thesisonderwerpen online kwam vond ik niet direct mijn ding. Op dat moment volgde ik het vak *Algoritmische grafentheorie* van prof. dr. Gunnar Brinkmann. Ik ging eens langs en hij stelde me verschillende interessante onderwerpen voor. Uiteindelijk koos ik voor het bepalen van een ondergrens voor het aantal Hamiltoniaanse cykels in triangulaties.

Ik wil mijn promotor prof. dr. Gunnar Brinkmann bedanken voor het begeleiden van deze thesis en het geven van interessante ideeën die ik dan kon uitwerken. Verder wil ik graag ook mijn medestudenten en vrienden bedanken voor de leuke jaren aan de universiteit. Mijn ouders bedank ik voor het nalezen op taalkundig vlak en omdat ze mij altijd gesteund hebben in mijn studies.

# Toelating tot bruikleen

De auteur geeft de toelating deze masterproef voor consultatie beschikbaar te stellen en delen van de masterproef te kopiëren voor persoonlijk gebruik. Elk ander gebruik valt onder de beperkingen van het auteursrecht, in het bijzonder met betrekking tot de verplichting de bron uitdrukkelijk te vermelden bij het aanhalen van resultaten uit deze masterproef.

Annelies Cuvelier, mei 2015.

# Inhoudsopgave

<b>Inleiding</b>	<b>1</b>
Probleemstelling . . . . .	1
Opbouw . . . . .	1
<b>1 Definities</b>	<b>2</b>
<b>2 Gekende resultaten</b>	<b>7</b>
<b>3 Eén splitsende driehoek</b>	<b>12</b>
<b>4 Geen splitsende driehoek</b>	<b>18</b>
<b>5 Nieuwe resultaten</b>	<b>22</b>
<b>Besluit</b>	<b>28</b>
<b>Appendix A Abstract</b>	<b>29</b>
<b>Bibliografie</b>	<b>31</b>

# Inleiding

## Probleemstelling

Whitney bewees in 1931 het bestaan van minstens één Hamiltoniaanse cykel in een 4-samenhangende triangulatie. Vervolgens waren het Hakimi, Schmeichel en Thomassen die in 1979 bewezen dat er minstens  $\frac{p}{\log_2 p}$  Hamiltoniaanse cyclen te vinden waren als  $p$  het aantal toppen van de 4-samenhangende triangulatie  $G$  is. Zij besloten hun artikel met een conjectuur.

*If  $G$  is a 4-connected maximal planar graph on  $p$  vertices, then  $G$  contains at least  $2(p-2)(p-4)$  Hamiltonian cycles, with equality if and only if  $G$  is the graph  $\bar{K}_2 + C_{p-2}$ .*

Dit wil zeggen dat ze vermoeden dat er minstens  $2(p-2)(p-4)$  Hamiltoniaanse cyclen zijn in een 4-samenhangende triangulatie op  $p$  toppen. Dit slechtste geval komt voor bij een *double wheel*.

Het duurde tot 2014 voor Brinkmann, Souffriau en Van Cleemput als eersten een lineaire grens op het minimale aantal Hamiltoniaanse cyclen in een 4-samenhangende triangulatie konden bewijzen.

Deze thesis probeert een vervolg te zijn voor wat in gang gezet is. Merk op, er wordt geen kwadratische grens bewezen, hiervoor zijn nieuwe technieken nodig. Wel worden de constanten van de lineaire grens door Brinkmann, Souffriau en Van Cleemput verbeterd.

## Opbouw

In het eerste hoofdstuk worden alle nodige basisdefinities uit de grafentheorie geïntroduceerd alsook de begrippen telbasis en overlap. Deze begrippen zullen veelvuldig gebruikt worden.

Het tweede hoofdstuk geeft aan welke resultaten omtrent dit probleem reeds gekend zijn.

Hoofdstukken drie en vier bevatten de recente ontwikkelingen van het probleem die gemaakt zijn door Brinkmann, Souffriau en Van Cleemput.

In hoofdstuk vijf wordt de stelling waarop de meest recente ontwikkelingen steunen nog verder veralgemeend om zo tot een betere ondergrens op het aantal Hamiltoniaanse cyclen in 4-samenhangende triangulaties te komen.

# Hoofdstuk 1

## Definities

Allereerst moeten we definiëren wat we verstaan onder een graaf.

**Definitie 1.1.** Een **graaf**  $G = (V, E)$  is een geordend paar van een verzameling  $V$  en een verzameling  $E$  van koppels elementen uit  $V$ . De elementen van  $V$  noemen we de **toppen** van een graaf en de elementen van  $E$  de **bogen** van een graaf.

We willen vaak een deel van een graaf apart beschouwen.

**Definitie 1.2.**  $G' = (V', E')$  is een **deelgraaf** van  $G = (V, E)$  als  $G$  en  $G'$  grafen zijn,  $V' \subseteq V$  en  $E' \subseteq E$ . Dit wordt genoteerd als  $G' \subseteq G$ .

Het *verschil* van een graaf en een deelgraaf bekomt men door het verwijderen van de bogen van de deelgraaf in de graaf:

**Notatie 1.3.** Als  $G = (V, E)$  een graaf is en  $G' = (V', E')$  een deelgraaf is van  $G$ , dan schrijven we  $G \setminus G'$  voor de graaf met als toppenverzameling  $V$  en als bogenverzameling  $E \setminus E'$ .

De *unie* van twee grafen bekomen we door bogen toe te voegen:

**Notatie 1.4.** Als  $G = (V, E)$  een graaf is en  $G' = (V', E')$  een graaf is zodat  $V' \subseteq V$ , dan schrijven we  $G \cup G'$  voor de graaf met als toppenverzameling  $V$  en als bogenverzameling  $E \cup E'$ .

Paden en cykels zijn twee specifieke soorten grafen.

**Definitie 1.5.** Een **pad** is een graaf  $P = (V, E)$  met  $n \geq 1$ ,  $V = \{v_0, v_1, \dots, v_n\}$  met alle  $v_i$  verschillend en  $E = \{\{v_i, v_{i+1}\} \mid 0 \leq i < n\}$ .

**Definitie 1.6.** Een **cykel** is een graaf  $C = (V, E)$  met  $n \geq 2$ ,  $V = \{v_0, v_1, \dots, v_n\}$  met alle  $v_i$  verschillend en  $E = \{\{v_i, v_{i+1}\} \mid 0 \leq i < n\} \cup \{v_0, v_n\}$ .

Als deelgraaf van een gegeven graaf zullen we zoeken naar cykels, meer bepaald Hamiltoniaanse cykels. Deze cykels doorlopen elke top van de graaf precies één keer.

**Definitie 1.7.** Een **Hamiltoniaanse cykel**  $C = (V_C, E_C)$  in een graaf  $G = (V, E)$  is een cykel die een deelgraaf is van  $G$  zodat  $V = V_C$ .



Vaak zullen we deelgrafen bekijken die op een Hamiltoniaanse cykel liggen.

**Definitie 1.8.** Een Hamiltoniaanse cykel  $C = (V, E_C)$  in een graaf  $G = (V, E)$  **verzadigt** een deelgraaf  $G' = (V', E')$  van  $G$  als  $V' \subseteq V$  en  $E' \subseteq E_C$ .

**Definitie 1.9.** Gegeven een functie  $r$  met als domein en bereik een deelverzameling van de deelgrafen van  $G$  dan is  $z(C, s, r) = (C \setminus s) \cup r(s)$  een **gemodificeerde Hamiltoniaanse cykel** afkomstig van een Hamiltoniaanse cykel  $C$  in een graaf  $G$ , ten opzichte van een deelgraaf  $s$  en voor een functie  $r$ .

Vaak zal de functie  $r$  niet expliciet vermeld worden aangezien deze duidelijk zal zijn uit de context. De definities van een *telbasis* en *overlap* werden geïntroduceerd in [1].

**Definitie 1.10.** Gegeven een graaf  $G = (V, E)$ , een niet-ledige verzameling  $S$  die deelgrafen van  $G$  bevat en een verzameling  $\bar{C}$  met Hamiltoniaanse cyclen van  $G$ . Dan noemen we de verzameling  $S$  samen met een functie  $r$  die de deelgrafen van  $S$  op deelgrafen van  $G$  afbeeldt een **telbasis**  $S, r$  voor  $\bar{C}$  en  $G$  als volgende voorwaarden voldaan zijn:

1. voor elke  $s \in S$  is er een Hamiltoniaanse cykel  $C \in \bar{C}$  zodat  $s$  verzadigt wordt door  $C$ ,
2. voor elke  $s \in S$  is  $r(s)$  een deelgraaf van  $G$  zodat  $s$  niet bevat is in  $r(s)$  en voor elke Hamiltoniaanse cykel  $C \in \bar{C}$  die  $s$  verzadigt moet de gemodificeerde Hamiltoniaanse cykel  $z(C, s)$  ook een Hamiltoniaanse cykel zijn bevat in  $\bar{C}$ ,
3. voor alle  $s_1 \neq s_2$  waarbij  $s_1, s_2 \in S$  en  $C$  die zowel  $s_1$  als  $s_2$  verzadigt, geldt dat  $z(C, s_1) \neq z(C, s_2)$ .

Verder stellen we  $\bar{S} := S \cup \{r(s) \mid s \in S\}$ .

Het volgende begrip, overlap, is zeer belangrijk samen met de definitie van een telbasis.

**Definitie 1.11.** Gegeven een telbasis  $S, r$  voor  $\bar{C}$  en  $G$  en een Hamiltoniaanse cykel  $C \in \bar{C}$  die  $x \in \bar{S}$  verzadigt, dan is de **overlap**  $o(C, x)$  gedefinieerd als

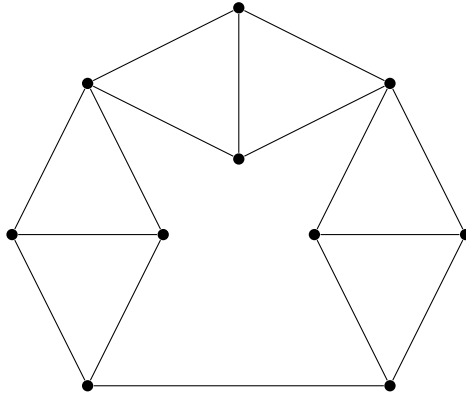
$$o(C, x) = |\{s' \in S \mid E(x \cap s) \neq \emptyset \text{ en } s' \subseteq C\}|.$$

Het niet-leeg zijn van  $E(x \cap s)$  betekent dat er minstens een boog moet zijn die zowel in  $x$  als in  $s$  bevat is. De tweede voorwaarde  $s' \subseteq C$  betekent dat  $V_{s'} \subseteq V_C$  en  $E_{s'} \subseteq E_C$ ,  $s'$  is een deelgraaf van  $C$ . In woorden betekent overlap het aantal  $s' \in S$  die deelgraaf zijn van de Hamiltoniaanse cykel  $C$  en minstens één boog gemeenschappelijk hebben met  $x$ .

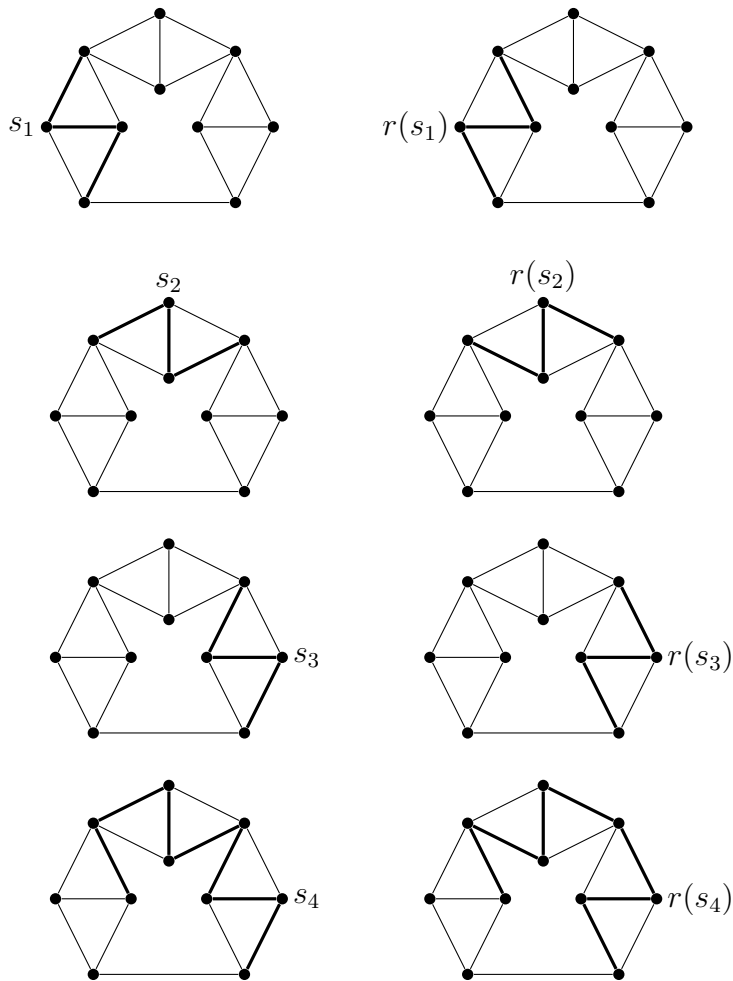
**Definitie 1.12.** Verder definiëren we de **maximale overlap**

$$o(S, r) = \max\{o(C, s) \mid C \in \bar{C}, s \in \bar{S} : s' \subseteq C\}.$$

De overlap  $o(S, r)$  is altijd minstens één aangezien we met een telbasis werken en er dus voor elke  $s \in S$  zeker een  $C$  is die  $s$  verzadigt.



Figuur 1.1: Graaf  $G$



Figuur 1.2: Deelgrafen van  $G$

**Voorbeeld 1.13.** In Figuur 1.1 ziet u de graaf  $G$ , ook zijn er enkele deelgrafen  $s_1, s_2, s_3, s_4$  gekozen alsook hun beeld onder de functie  $r$ . Deze deelgrafen worden voorgesteld in Figuur 1.2 door middel van de dikkere lijnen.  $S$  bestaat uit de deelgrafen

$s_1, r(s_1), s_2, s_3, r(s_3), s_4$ . Het domein van  $r$  is  $S$  en het beeld onder  $r$  van een zekere  $r(s)$  is  $s$ . De functie  $r$  is hier dus involutief.  $\bar{C}$  definiëren we als de verzameling van alle Hamiltoniaanse cyclen in deze graaf.

Vooraleer we over overlap kunnen spreken, tonen we aan dat we een telbasis hebben. De eerste voorwaarde, dat elke  $s \in S$  door een zekere  $C \in \bar{C}$  verzadigd wordt, is zeker voldaan. Verder is de deelgraaf  $s$  nooit een deelgraaf van  $r(s)$ . Dan rest aan te tonen dat de gemodificeerde Hamiltoniaanse cykel  $z(C, s)$  bevat is in  $\bar{C}$ . De verzameling  $\bar{C}$  bevat alle Hamiltoniaanse cyclen van  $G$  dus moeten we aantonen dat we een Hamiltoniaanse cykel bekomen. Dit kunnen we inzien aangezien  $s$  en  $r(s)$  deelgrafen over dezelfde toppen zijn met zelfde begin- en eindtop van het pad. Ook blijft de graad van elke top gelijk. De tweede voorwaarde is hierdoor voldaan. De derde voorwaarde moet geval per geval nagegaan worden, maar is niet al te moeilijk om in te zien.

Als we nu  $o(C, r(s_1))$  willen berekenen is dit twee of één, afhankelijk van de Hamiltoniaanse cykel  $C$ . De deelgraaf  $r(s_1)$  heeft met zichzelf een doorsnede die niet-ledig is en ze worden door dezelfde Hamiltoniaanse cyclen verzadigd. Ook met  $s_1, s_4, r(s_4)$  heeft  $r(s_1)$  een niet-ledige doorsnede. De deelgraaf  $s_1$  kan echter nooit tegelijk met  $r(s_1)$  op eenzelfde Hamiltoniaanse cykel liggen. Een Hamiltoniaanse cykel die  $r(s_1)$  en ook nog  $s_4$  of  $r(s_4)$  verzadigt is wel mogelijk.

De waarde voor  $o(S)$  bedraagt in dit geval vier. Dit maximum bereiken we door voor  $C$  de cykel te nemen gaande door de deelgrafen  $r(s_1)$  en  $s_4$  en deze te vervolledigen. De overlappende deelgrafen met  $s_4$  die verzadigd worden door de cykel  $C$  zijn  $s_4, r(s_1), s_2$  en  $s_3$ .

**Definitie 1.14.** Een **vlakke graaf** is een graaf die getekend is in het vlak zonder dat er kruisende bogen zijn of bogen die door toppen gaan.

**Definitie 1.15.** Een graaf  $G = (V, E)$  is **samenhangend** als er voor elke twee verschillende toppen een pad van de ene top naar de andere top bestaat.

Indien een graaf niet-samenhangend is, zijn er zeker twee toppen waartussen er geen pad bestaat. We zeggen dan dat deze graaf uit samenhangscomponenten bestaat. In een samenhangscomponent zitten alle toppen waarvoor er een pad bestaat vanaf een gegeven vaste top, dit is een equivalentierelatie.

In het vervolg zullen alle grafen steeds vlakke samenhangende grafen zijn. Voorheen definieerden we het verschil van twee grafen. De volgende definitie lijkt erop maar verwijderd nu ook alle toppen van de deelgraaf.

**Notatie 1.16.** Als  $G = (V, E)$  een graaf is en  $G' = (V', E')$  een deelgraaf is van  $G$ , dan schrijven we  $G - G'$  voor de graaf bestaande uit de toppen  $V^* = V \setminus V'$  en bogen  $E \cap \binom{V^*}{2}$ .

**Definitie 1.17.** Een verzameling toppen  $M$  is een **splitsende verzameling** voor de graaf  $G = (V, E)$  als de graaf  $G - G'$  niet meer samenhangend is met  $G' = (M, \emptyset)$ .

**Definitie 1.18.** De graaf  $G = (V, E)$  is **k-samenhangend** als  $G$  samenhangend is,  $|V| > k$  en er bestaat geen splitsende verzameling  $M \subset V$  met  $|M| < k$ .

**Definitie 1.19.** Een **driehoek** is een deelgraaf  $G' = (V', E')$  van een graaf  $G = (V, E)$  waarbij  $V'$  slechts drie toppen bevat die we  $v_1, v_2$  en  $v_3$  kunnen noemen en  $E' = \{\{v_1, v_2\}, \{v_2, v_3\}, \{v_3, v_1\}\}$ . De kortere en in het vervolg gebruikte notatie voor deze driehoek is  $\{v_1, v_2, v_3\}$ .

We zullen vooral 4-samenhangende grafen beschouwen, dit zijn grafen waarin geen splitsende verzameling van 3 of minder toppen te vinden is. In het bijzonder is er dus ook geen splitsende driehoek, er zijn dus geen 3 onderling adjacenten toppen zodat na het weglaten van deze toppen de graaf niet meer samenhangend is.

**Definitie 1.20.** Een **georiënteerde of gerichte boog** van een graaf  $G = (V, E)$  is een boog  $\{v, w\} \in E$  waaraan we een richting toekennen. Voor elke boog uit  $E$  zijn er twee gerichte bogen over dezelfde toppen. We schrijven  $(v, w)$  voor de boog met als starttop  $v$  en als eindtop  $w$ . De andere gerichte boog over dezelfde toppen is  $(w, v)$  en kan ook geschreven worden als  $(v, w)^{-1}$ .

**Definitie 1.21.** De **graad** van een top  $v \in V$  in een graaf  $G = (V, E)$  is het aantal  $e \in E$  waarvoor  $v \in e$ , dit aantal noteren we als  $\deg(v)$ .

**Definitie 1.22.** Een **ingebedde graaf**  $G = (V, E, opv)$  is een graaf  $(V, E)$  samen met een functie  $opv$  die aan elke georiënteerde boog  $(v, w)$  een georiënteerde boog met dezelfde starttop toekent zodat voor alle georiënteerde bogen  $(v, w)$  geldt dat

$$\{(v, w), opv(v, w), opv^2(v, w), \dots, opv^{\deg(v)-1}(v, w)\} = \{(v, y) \mid \{v, y\} \in E \text{ en } y \in V\}.$$

Hierbij staat  $opv^i(v, w)$  voor de  $i$ -de opvolger van  $(v, w)$ , de functie  $opv$  wordt dus  $i$  keer toegepast. Hiermee leggen we de volgorde van de bogen rond  $v$  vast. Merk ook op dat de volgorde van de argumenten van belang is.

**Notatie 1.23.** Met  $\{opv(v, w)\}$  bedoelen we de (niet-georiënteerde) boog, zodanig dat een van de twee georiënteerde bogen de opvolger is van  $(v, w)$ .

**Definitie 1.24.** Gegeven een ingebedde graaf  $G = (V, E, opv)$ , dan vormen  $(v, w)$  en  $(w, x)$  een hoek als  $(w, x) = opv(w, v)$ .

Een georiënteerde boog  $(v, w)$  maakt dus deel uit van twee hoeken namelijk van de hoek  $(v, w), opv(w, v)$  en van de hoek  $(opv^{-1}(v, w))^{-1}, (v, w)$ .

**Definitie 1.25.** Beschouw de graaf  $VL(G)$  waarbij de toppen de georiënteerde bogen van  $G$  zijn en twee georiënteerde bogen zijn adjacent als deze een hoek vormen. Dit noemen we de **vlakkengraaf** van een ingebedde graaf  $G$ . Elke top in deze graaf heeft graad twee. De samenhangscomponenten van  $VL(G)$  noemen we de **vlakken** van de ingebedde graaf.

**Stelling 1.26** (Formule van Euler voor veelvlakken). *Voor een vlakke graaf  $G = (V, E)$  met vlakkenverzameling  $F$  geldt dat  $|V| - |E| + |F| = 2$ .*

**Definitie 1.27.** Een **triangulatie** is een vlakke graaf waarin elk vlak een driehoek is.

**Definitie 1.28.** De **complete graaf op  $n$  toppen**  $K_n$  is een graaf met  $n$  toppen waarbij elke twee toppen adjacent zijn.

# Hoofdstuk 2

## Gekende resultaten

Whitney bewees in [5] dat elke 4-samenhangende triangulatie minstens één Hamiltoniaanse cykel bevat, hij bewees zelfs de volgende meer algemene stelling.

**Stelling 2.1.** *Stel dat  $T$  een 4-samenhangende triangulatie is. Beschouw nu een cykel  $C$  in  $T$  samen met de toppen en bogen aan één kant van  $C$  (deze kant noemen we de buitenkant). Stel dat  $x$  en  $y$  toppen van  $C$  zijn die  $C$  in de paden  $P_1$  en  $P_2$  splitsen die beide  $x$  en  $y$  bevatten. Stel dat*

- *er geen twee toppen van  $P_1$  verbonden zijn door middel van een boog buiten  $C$  en*
- *ofwel er geen twee toppen van  $P_2$  verbonden zijn door middel van een boog aan de buitenkant van  $C$  ofwel er een top  $z$  is (verschillend van  $x$  en  $y$ ) die  $P_2$  in de paden  $P_3$  en  $P_4$  verdeelt die beide  $z$  bevatten zodat er geen koppel toppen in  $P_3$  of  $P_4$  is die verbonden zijn door middel van een boog aan de buitenkant van  $C$ ,*

*dan is er een pad van  $x$  naar  $y$  dat enkel bogen van  $C$  en aan de buitenkant van  $C$  gebruikt en die door elk van die toppen van  $C$  en aan de buitenkant van  $C$  juist één keer gaat.*

Indien we nu ook een pad van  $x$  naar  $y$  zouden kunnen construeren door alle toppen van de binnenkant, dan vormt dit pad samen met het pad uit Stelling 2.1 een Hamiltoniaanse cykel.

Volgend lemma is een welgekende eigenschap van triangulaties.

**Lemma 2.2.** *Stel dat  $T = (V, E)$  een triangulatie is met  $|V| = p$  dan is  $|E| = 3(p - 2)$  en  $|F| = 2(p - 2)$ .*

*Bewijs.* Aangezien  $T$  een triangulatie is weten we door middel van een dubbele telling dat  $2|E| = 3|F|$ . Verder kennen we de formule van Euler. We krijgen dat

$$\begin{aligned} 2 &= p - |E| + \frac{2}{3}|E| \\ \Leftrightarrow |E| &= 3(p - 2). \end{aligned}$$

Hieruit volgt ook makkelijk dat  $|F| = 2(p - 2)$ . □

Het sterkste resultaat was lange tijd dat van Hakimi, Schmeichel en Thomassen uit [3].

**Stelling 2.3.** *Stel dat  $T = (V, E)$  een 4-samenhangende triangulatie is met  $|V| = p$  dan bevat  $T$  minstens  $\frac{p}{\log_2 p}$  Hamiltoniaanse cykels.*

De volgende stelling is afkomstig uit [1]. Deze stelling geeft aanzet tot een lineaire en dus betere ondergrens op het aantal Hamiltoniaanse cykels.

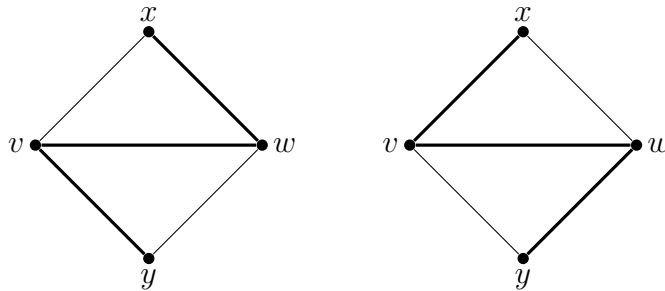
**Stelling 2.4.** *Gegeven een graaf  $G$ , een verzameling  $\bar{C}$  van Hamiltoniaanse cykels van  $G$  en een niet-ledige telbasis  $S, r$  voor  $\bar{C}$  en  $G$ , dan geldt dat  $|\bar{C}| \geq \frac{|S|}{o(S, r)}$ .*

**Bewijs.** Dit is een speciaal geval van Stelling 5.3 en zal daar bewezen worden.  $\square$

Aangezien dit een ondergrens is voor het aantal Hamiltoniaanse cykels zal  $S$  steeds zo groot mogelijk gekozen worden en zal de bijhorende  $o(S, r)$  zo klein mogelijk moeten zijn. In het vervolg zal  $S$  dus vaak toevallig gelijk zijn aan  $\bar{S}$ .

**Stelling 2.5.** *Stel dat  $T = (V, E)$  een 4-samenhangende triangulatie is met  $|V| = p$  dan bevat  $T$  minstens  $\frac{6}{5}(p - 2)$  Hamiltoniaanse cykels.*

**Bewijs.** We zullen Stelling 2.4 toepassen voor een speciaal gekozen  $S$  en  $r$ . Voor elke boog  $\{v, w\} \in E$  kiezen we een vaste oriëntatie. Voor deze oriëntatie  $(v, w)$  selecteren we de deelgraaf bestaande uit de bogen  $\{opv(v, w)\}, \{v, w\}$  en  $\{opv(w, v)\}$ . Voor het verdere gemak zullen we de toppen zonder naam horend bij voorgaande bogen ook benoemen:  $opv(v, w) = (v, y)$  en  $opv(w, v) = (w, x)$  voor zekere  $x, y \in V$ . We selecteren ook de deelgraaf bestaande uit de bogen  $\{opv^{-1}(v, w)\} = \{v, x\}, \{v, w\}$  en  $\{w, y\} = \{opv^{-1}(w, v)\}$ , dit is de definitie van  $r(s)$  als we de eerste deelgraaf  $s$  noemen. Beide deelgrafen worden voorgesteld in Figuur 2.1.



Figuur 2.1: Deelgrafen  $s$  en  $r(s)$

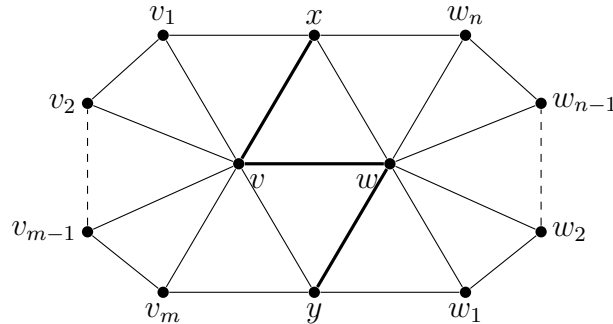
De verzameling  $S$  zal uit alle mogelijke deelgrafen  $s$  en  $r(s)$  bestaan. Aangezien wegens Lemma 2.2 het aantal bogen in een triangulatie  $3(p - 2)$  is, hebben we zonet  $6(p - 2)$  unieke deelgrafen geconstrueerd. De functie  $r$  kiezen we involutief, dus  $r(r(s)) = s$ . Deze deelgrafen zijn allen uniek. Stel dat  $s$  en  $s'$  identiek zouden zijn, dan moet de middelste boog dezelfde zijn. Er is echter maar één andere deelgraaf met dezelfde middelste boog die we  $\{v, w\}$  noemen. Bij definitie van  $S$  bevat de ene deelgraaf  $\{opv(v, w)\}$  en de andere  $\{opv^{-1}(v, w)\}$ . Indien deze bogen gelijk zijn dan is de graad

van top  $v$  twee, wat strijdig is met de 4-samenhangendheid van  $T$ . Bijgevolg bestaat  $S$  uit  $6(p - 2)$  verschillende elementen.

De verzameling  $\bar{C}$  van Hamiltoniaanse cykels kiezen we als de verzameling van alle Hamiltoniaanse cykels in de graaf  $T$ .

We gaan nu na dat de voorwaarden voor een telbasis voldaan zijn.

1. Elke deelgraaf  $s$  in  $S$  kunnen we voorstellen als opeenvolging van drie bogen die we als volgt labelen  $\{x, v\}, \{v, w\}, \{w, y\}$ . Nu proberen we een Hamiltoniaanse cykel te construeren die  $s$  verzadigt. We benoemen de toppen incident met  $v$  en  $w$  tegenwijzerzin, de burenen van  $v$ :  $w, x, v_1, v_2, \dots, v_m, y$ , de burenen van  $w$ :  $v, y, w_1, w_2, \dots, w_n, x$ . Figuur 2.2 is een weergave van de toppen met hun labels.



Figuur 2.2: Cykel  $S$  rond  $v$  en  $w$

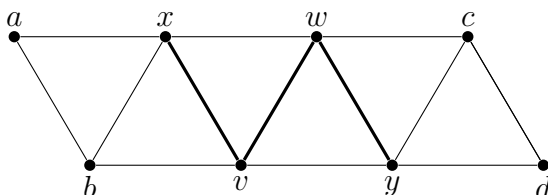
Beschouw de cykel  $S$  met toppen  $\{x, v_1, v_2, \dots, v_m, y, w_1, w_2, \dots, w_n\}$  in  $G$ . De toppen  $x$  en  $y$  verdelen deze cykel in twee paden die aan de voorwaarden van Stelling 2.1 voldoen. Indien er namelijk een boog zou zijn van de vorm  $\{v_i, v_j\}$  (met  $i + 1 < j$ ) aan de buitenkant van  $C$  dan is er een splitsende driehoek  $\{v_i, v_j, v\}$  in  $T$ , dit is strijdig met het feit dat  $T$  een 4-samenhangende graaf is. Een analoog argument kan gebruikt worden om aan te tonen dat er ook geen boog  $\{w_i, w_j\}$  (waarbij  $i + 1 < j$ ) bestaat. Uit deze stelling krijgen we een pad tussen  $x$  en  $y$  dat door alle toppen van  $C$  en alle toppen aan de buitenkant van  $C$  gaat. Dit kan uitgebreid worden tot een Hamiltoniaanse cykel van  $T$  door  $s$  eraan toe te voegen. Aangezien  $\bar{C}$  alle Hamiltoniaanse cykels bevat is de eerste voorwaarde voldaan.

2. De tweede voorwaarde voor een telbasis volgt onmiddellijk uit de definitie van de functie  $r$ .
3. De derde voorwaarde verifiëren we door te kijken naar de overlap tussen de deelgrafen  $s_1, s_2 \in S$  die op eenzelfde cykel  $C$  liggen. Als deze niet overlappen is  $z(C, s_1) \neq z(C, s_2)$ . Wanneer ze overlappen, hebben ze minstens één boog die verschillend is. Indien dit de middelste boog is van  $s_1$  of  $s_2$  zijn de grafen op het einde zeker niet gelijk, dit aangezien de middelste boog behouden blijft onder  $r$ . Zonder verlies van algemeenheid stellen we nu dat de boog  $e$  in  $s_1$  zit maar niet in  $s_2$ , dus zal  $e$  niet in  $z(C, s_1)$  zitten maar wel in  $z(C, s_2)$  en besluiten we dat de derde voorwaarde ook voldaan is.

Nu rest ons nog een bovengrens voor  $o(S, r)$  te bepalen. Zij  $C$  een Hamiltoniaanse cykel die een  $s = \{x, v\}, \{v, w\}, \{w, y\}$  bevat, dan is  $o(S, r) \leq 5$ , elke top in een cykel heeft graad twee zodus kan deze rondom  $\{v, w\}$  voorgesteld worden als een opeenvolging van bogen :

$$C = \dots, \{a, b\}, \{b, x\}, \{x, v\}, \{v, w\}, \{w, y\}, \{y, c\}, \{c, d\}, \dots$$

Er zijn dus maximaal vijf deelgrafen  $s' \in \bar{S}$  die ook op deze Hamiltoniaanse cykel liggen en overlappen met  $s$ , dit slechtste geval kan je zien in Figuur 2.3.



Figuur 2.3: Slechtste geval van overlap

Als we nu Stelling 2.4 toepassen met  $|S| = 6(p - 2)$  en  $o(S, r) = 5$  verkrijgen we dat

$$|\bar{C}| \geq \frac{6}{5}(p - 2).$$

□

Zonet bewezen we een lineaire ondergrens voor het aantal Hamiltoniaanse cyclen in een 4-samenhangende triangulatie. Het argument waarin we Stelling 2.1 toepassen is afkomstig uit het bewijs van Stelling 2.3 in [3].

In de literatuur is er nog een lineaire grens terug te vinden. Helden gaf het volgende resultaat in zijn doctoraatsthesis [4].

**Stelling 3.73** Stel dat  $G$  een 4-samenhangende triangulatie is met  $n \geq 7$  toppen. Dan bevat  $G$  minstens  $4n - 8$  Hamiltoniaanse cyclen.

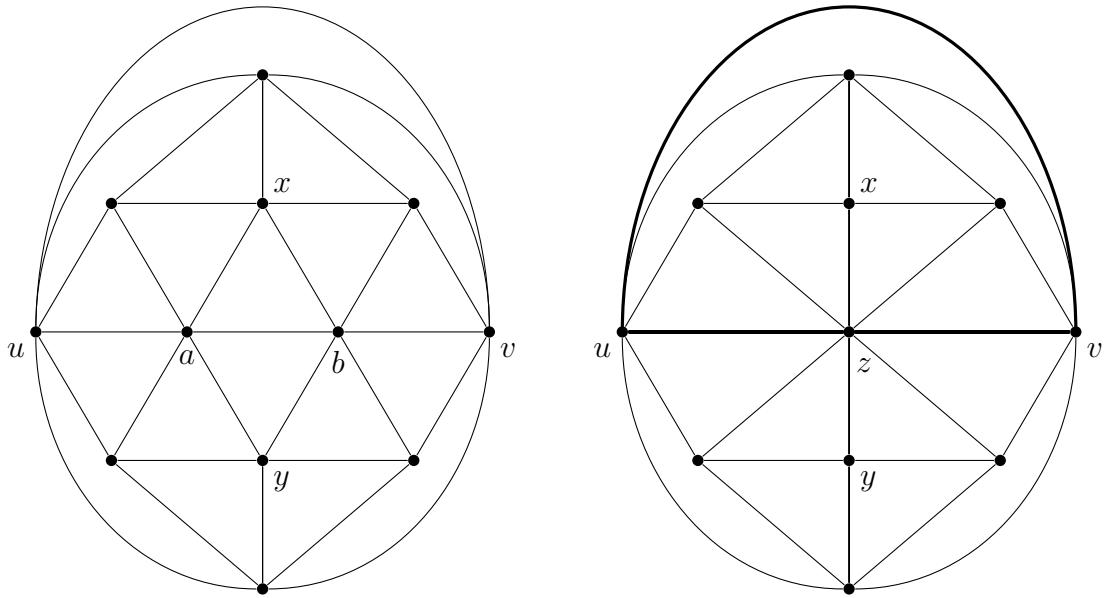
Echter stonden in het ‘bewijs’ enkele fouten.

Het bewijs van Stelling 3.73, waarin hij tot het lineaire resultaat komt, steunt op Stelling 3.36 dewelke op zijn beurt steunt op Definitie 3.35.

**Definitie 3.35** Stel dat  $G = (V, E)$  een triangulatie is zonder splitsende driehoeken en met  $|V| = p \geq 7$  toppen. Stel dat  $x$  en  $y$  twee toppen zijn met graad minstens vijf en stel dat er minstens twee toppen zijn die adjacent zijn aan zowel  $x$  als  $y$ . Stel dat  $a$  en  $b$  elk zo’n top zijn zodat  $\{a, b\} \in E$ . De operatie  $T$  is dan als volgt gedefinieerd:  $T$  contracteert de twee toppen  $a$  en  $b$  tot één nieuwe top  $z$ , de toppen  $a$  en  $b$  worden verwijderd. De top  $z$  wordt toegevoegd en is adjacent met elke top waarmee  $a$  en/of  $b$  adjacent was. Deze nieuwe graaf  $G'$  is een triangulatie zonder splitsende driehoeken met  $p - 1$  toppen.



In Figuur 2.4 ziet u een tegenvoorbeeld voor de eigenschap horend bij deze definitie, namelijk dat deze nieuwe graaf na contractie nog steeds geen splitsende driehoeken bevat.



(a) Toppen  $a$  en  $b$  zullen gecontracteerd worden tot  $z$

(b) Splitsende driehoek  $\{u, z, v\}$

Figuur 2.4: Tegenvoorbeeld

Vervolgens maakt hij gebruik van een stelling van Whitney uit [6] die zegt dat een inbedding van een 3-samenhangende planaire graaf uniek is. Een inbedding is uniek als alle inbeddingen equivalent zijn. Equivalentie had Whitney topologisch gedefinieerd met behulp van homeomorfismen op een sfeer. Helden misbruikt deze stelling door een andere definitie van equivalentie te nemen. Voor hem betekent equivalentie dat je gegeven een bepaalde inbedding, je via hernoeming van de toppen elk vlak eens als buitenvlak kan beschouwen en dat alle andere incidenties hetzelfde blijven. Dit loopt echter al mis van zodra we in een triangulatie twee driehoeken vinden waarvoor de verzameling graden op de toppen van de driehoek in de triangulatie verschillend is, het is dan namelijk onmogelijk het ene vlak op het andere af te beelden en alle incidenties te behouden.

Op het einde beweert Helden dat een Hamiltoniaanse cykel twee verschillende oriëntaties heeft. Dit is niet waar aangezien in de definitie van een cykel niet over oriëntaties gesproken wordt.

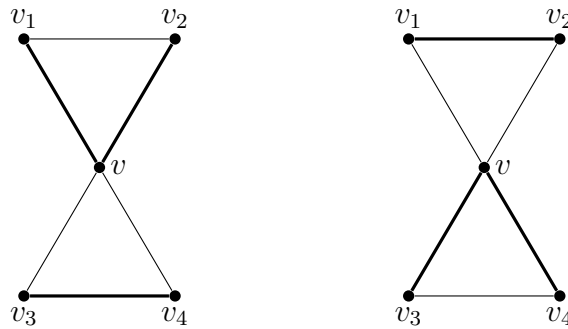
# Hoofdstuk 3

## Eén splitsende driehoek

Dit hoofdstuk handelt over het minimale aantal Hamiltoniaanse cyclen in triangulaties met juist één splitsende driehoek en is volledig gebaseerd op het artikel van Brinkmann, Souffriau en Van Cleemput [1].

**Definitie 3.1.** Een **splitsende driehoek** is een cykel  $C$  van lengte drie die een deelgraaf van de samenhangende graaf  $G$  is, zodat de graaf  $G - C$  niet-samenhangend is.

**Definitie 3.2.** Een **zandloper**  $Z = (V_Z, E_Z)$  in een triangulatie  $T = (V, E)$  is een deelgraaf van  $T$  met  $V_Z = \{v_1, v_2, v, v_3, v_4\}$  en  $E_Z = \{\{v_1, v\}, \{v_2, v\}, \{v_3, v_4\}\}$ . Zodat  $t_1 = \{v_1, v_2, v\}$  en  $t_2 = \{v_3, v_4, v\}$  twee boog-disjuncte driehoeken zijn. De driehoek  $t_1$  noemen we de eerste driehoek van de zandloper  $Z$ ,  $t_2$  noemen we de tweede driehoek. De top  $v$  noemen we de **centrale top** van de zandloper,  $\{v_1, v\}, \{v_2, v\}$  zijn de **v-bogen** en  $\{v_3, v_4\}$  is de **basisboog**. De **inverse zandloper**  $r(Z)$  is gedefinieerd als de deelgraaf  $Z' = (V_{Z'}, E_{Z'})$  van  $T$  met  $V_{Z'} = V_Z$  en  $E_{Z'} = \{\{v_3, v\}, \{v_4, v\}, \{v_1, v_2\}\}$ . Deze twee deelgrafen kunt u zien op Figuur 3.1.



Figuur 3.1: Zandloper  $Z$  en inverse zandloper  $r(Z)$

**Definitie 3.3.** Een **ijle verzameling** zandlopers  $H$  is een verzameling zodat er geen twee verschillende elementen  $Z_1, Z_2 \in H$  zijn die dezelfde verzameling v-bogen hebben.

**Definitie 3.4.** Een ijle verzameling zandlopers  $H$  wordt **ijl voor een niet-splitsende driehoek  $t_0$**  genoemd als voor elke zandloper in  $H$  die met  $t_0$  een boog gemeen heeft,  $t_0$  de eerste of tweede driehoek van deze zandloper is. Dit zullen we noteren als  $H_{t_0}$ .

**Stelling 3.5.** *Stel dat  $T = (V, E)$  een triangulatie is met  $|V| = p$ , de minimumgraad van elke top van  $T$  minstens vier is en stel dat  $t_0$  een niet-splitsende driehoek van  $T$  is.*

- Dan heeft  $T$  een ijle verzameling zandlopers  $H$  van grootte  $6(p - 2)$ .
- Dan heeft  $T$  een ijle verzameling zandlopers  $H_{t_0}$  van grootte  $6p - 21$  die ook ijl is voor de driehoek  $t_0$ .

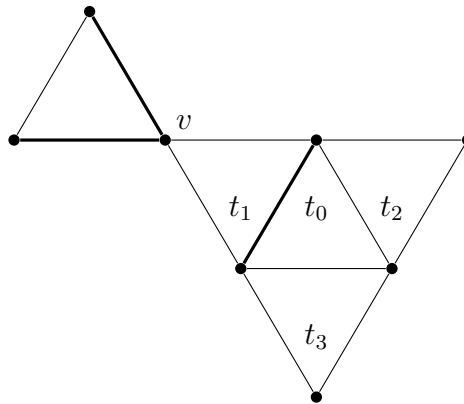
**Bewijs.**

- De triangulatie  $T$  heeft  $2(p - 2)$  driehoeken wegens Lemma 2.2. Voor elke driehoek zijn er 3 mogelijkheden om de v-bogen van een zandloper te kiezen. Voor elke verzameling van v-bogen kiezen we juist één basisboog. Hierdoor is de geconstrueerde verzameling ijl. Deze basisboog kan ook steeds gekozen worden aangezien de minimumgraad van elke top vier is.

We hebben nu een ijle verzameling  $H$  geconstrueerd die  $6(p - 2)$  zandlopers bevat.

- We vertrekken van de verzameling  $H$  geconstrueerd in het vorige puntje. Er zijn drie driehoeken  $t_1, t_2, t_3$  die elk een boog gemeenschappelijk hebben met de driehoek  $t_0$ . Deze liggen allemaal aan de binnen- of buitenkant van  $t_0$ . Stel dat er nog driehoeken zijn die een boog gemeenschappelijk hebben met  $t_0$  naast  $t_1, t_2, t_3$  en verschillend zijn van  $t_0$ , dan ligt er minstens één driehoek aan de binnenkant van  $t_0$  en één aan de buitenkant. Nu is  $t_0$  echter een splitsende driehoek wat in strijd is met het gestelde.

Voor elk van de driehoeken  $t_1, t_2, t_3$  zijn er twee zandlopers die deze driehoek als eerste driehoek hebben en een boog gemeenschappelijk hebben met  $t_0$ , deze 6 zandlopers moeten we dus zeker verwijderen uit  $H$ .



Figuur 3.2: Basisboog gemeenschappelijk met  $t_0$

Verder kan de basisboog ook nog problemen opleveren. Beschouw van een driehoek aanliggend aan  $t_0$  de ene top die deze niet deelt met  $t_0$  en noem deze  $v$  (zie Figuur 3.2 waarbij  $t_1$  als driehoek aanliggend aan  $t_0$  gekozen is).

Als de graad van  $v$  ten minste vijf is dan kan elke zandloper die deze aanliggende driehoek als tweede driehoek had vervangen worden door een zandloper met dezelfde eerste driehoek maar een andere tweede driehoek zodat de verzameling ij is voor  $t_0$ .

Als de graad van  $v$  echter exact vier is, dan was deze zandloper uniek voor de gegeven eerste driehoek en zullen we deze moeten verwijderen. Zo moeten we maximaal nog drie zandlopers extra verwijderen.

De zonet geconstrueerde ijle verzameling  $H_{t_0}$  bestaat uit minimaal  $6p - 21$  zandlopers.

□

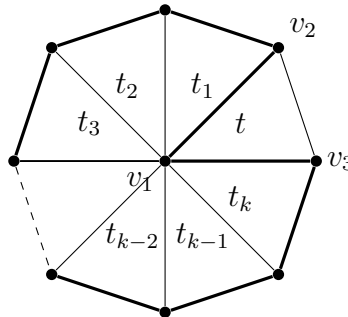
We vermelden nu een belangrijk resultaat van Jackson en Yu dat terug te vinden is in [2]. Dit zullen we gebruiken om Stelling 3.7 aan te tonen.

**Stelling 3.6.** *Stel dat  $T$  een 4-samenhangende triangulatie is en  $t = \{v_1, v_2, v_3\}, t', t''$  verschillende driehoeken van  $T$  zijn, dan bestaat er een Hamiltoniaanse cykel  $C$  in  $T$  en bogen  $e_1 \in t', e_2 \in t''$  zodat de bogen  $e_1, e_2, \{v_1, v_2\}, \{v_1, v_3\}$  allen verschillend zijn en bevat in  $C$ .*

**Stelling 3.7.** *Stel dat  $T$  een 4-samenhangende triangulatie is en  $t = \{v_1, v_2, v_3\}$  een driehoek in  $T$  is, dan zijn er minstens twee Hamiltoniaanse cycli van  $T$  die de bogen  $\{v_1, v_2\}$  en  $\{v_1, v_3\}$  bevatten.*

**Bewijs.** Als we in Stelling 3.6 de driehoeken  $t'$  en  $t''$  willekeurig kiezen dan kunnen we afleiden dat  $T$  zeker een Hamiltoniaanse cykel  $C$  heeft die de bogen  $\{v_1, v_2\}$  en  $\{v_1, v_3\}$  bevat.

We willen echter bewijzen dat er minstens twee Hamiltoniaanse cycli zijn. Stel dat alle driehoeken  $t_1, \dots, t_k$  die niet  $t$  zijn en wel de top  $v_1$  bevatten ook een boog gemeenschappelijk hebben met  $C$  die niet  $\{v_1, v_2\}$  of  $\{v_1, v_3\}$  is (zie Figuur 3.3). Deze bogen zouden een cykel vormen aangezien de bogen nooit van de vorm  $\{v_1, x\}$  kunnen zijn aangezien er reeds twee bogen zijn van de Hamiltoniaanse cykel die  $v_1$  bevatten, deze cykel is dus  $C$ . Dus is  $v_1$  adjacent met alle andere toppen van  $T$ .



Figuur 3.3: Situatie waarin alle andere driehoeken die  $v_1$  bevatten een boog gemeenschappelijk hebben met  $C$  die niet  $\{v_1, v_2\}$  of  $\{v_1, v_3\}$  is

Er moeten nog bogen zijn in deze graaf die te zien is in Figuur 3.3 aangezien elk vlak een driehoek moet zijn. Zo'n extra boog  $\{v_i, v_j\}$  (met  $i + 1 < j$ ) zou dan een deel zijn van een splitsende driehoek  $\{v_i, v_j, v_1\}$  wat strijdig is met de 4-samenhangendheid van de triangulatie  $T$ .

Bijgevolg kunnen niet alle  $t_i$  deze eigenschap hebben. Door een zekere  $t_i = \{v_1, x, y\}$  te kiezen die niet aan de voorwaarden voldoet hebben we een boog  $\{x, y\}$  die geen deel is van de oorspronkelijke Hamiltoniaanse cykel. Nu kunnen we Stelling 3.6 met  $t_i$  als  $t'$  toepassen en zo een andere Hamiltoniaanse cykel bekomen want nu is de boog  $\{x, y\}$  zeker een deel van de geconstrueerde cykel.  $\square$

**Notatie 3.8.** We schrijven  $\bar{C}_{t_0}$  voor de verzameling van alle Hamiltoniaanse cyclen van een graaf die minstens één boog van de driehoek  $t_0$  bevatten.

**Stelling 3.9.** *Gegeven een 4-samenhangende triangulatie  $T$  en een niet-splitsende driehoek  $t_0$  van  $T$ . Dan is elke verzameling zandlopers  $H_{t_0}$  die ijl is voor  $t_0$  een telbasis voor  $\bar{C}_{t_0}$ .*

**Bewijs.**

1. Stel dat  $Z$  een arbitraire zandloper is. Indien  $t_0$  een van de twee driehoeken van  $Z$  is, kies dan  $t''$  als een willekeurige derde driehoek, anders kies  $t'' = t_0$ . Pas nu Stelling 3.6 toe met  $\{v_1, v_2\}, \{v_1, v_3\}$  de v-bogen van  $Z$  en kies  $t'$  als de driehoek die de basisboog bevat. Nu weten we dat  $T$  een Hamiltoniaanse cykel  $C$  bevat die  $Z$  verzadigt en een boog van  $t_0$  bevat zodat  $C \in \bar{C}_{t_0}$ .
2. Voor een  $C \in \bar{C}_{t_0}$  en  $Z \in H_{t_0}$  is  $z(C, Z)$  nog steeds een Hamiltoniaanse cykel. Als  $t_0$  een van de driehoeken van de zandloper is, dan zal  $z(C, Z)$  nu andere bogen van  $t_0$  bevatten, maar nog steeds minstens een boog van  $t_0$ . Als  $t_0$  geen van de driehoeken van de zandloper is dan zal  $z(C, Z)$  dezelfde bogen van  $t_0$  bevatten als  $C$ , dus zal er altijd gelden dat  $z(C, Z) \in \bar{C}_{t_0}$ .
3. Als  $Z_1 \neq Z_2$  beide verzadigd worden door  $C$ , dan is minstens een van de v-bogen van  $Z_1$  niet bevat in  $Z_2$  aangezien  $H_{t_0}$  een ijle verzameling zandlopers is. We noemen deze boog  $e$ . De boog  $e$  is niet bevat in  $z(C, Z_1)$ , maar zit wel in  $z(C, Z_2)$  dus zijn deze Hamiltoniaanse cyclen verschillend.

$\square$

Om een ondergrens voor de grootte van  $\bar{C}_{t_0}$  te berekenen moet eerst nog de overlap berekend worden.

**Stelling 3.10.** *Gegeven een triangulatie  $T$  en een ijle verzameling zandlopers  $H$ .*

1. *Voor elke Hamiltoniaanse cykel  $C$  is elke boog  $e \in C$  bevat in maximaal twee zandlopers van  $H$  die verzadigd worden door  $C$ .*
2. *Voor elke niet-splitsende driehoek  $t_0$  en elke verzameling  $\bar{C}_{t_0}$  van Hamiltoniaanse cyclen geldt dat  $o(H, r) \leq 4$ .*

## Bewijs.

1. Stel dat  $t, t'$  de twee driehoeken zijn die de boog  $e$  bevatten. Als  $C$  ook nog een andere boog  $e'$  van  $t$  bevat dan kan  $t$  enkel als eerste driehoek in een verzadigde zandloper voorkomen. Aangezien  $H$  ijl is impliceert dit dat er juist één zandloper is met v-bogen  $e, e'$ , dus  $t$  ligt in maximaal één verzadigde zandloper. Als  $C$  geen andere boog van  $t$  bevat dan kan  $t$  enkel voorkomen als tweede driehoek van een verzadigde zandloper. Stel dat  $w$  de top van de driehoek  $t$  is die niet bevat is in  $e$ , dan zijn er juist twee bogen van  $C$  die door  $w$  passeren aangezien  $C$  een Hamiltoniaanse cykel is. Deze kunnen de v-bogen van ten hoogste één zandloper vormen. Dezelfde argumentatie kunnen we herhalen voor  $t'$  dus kunnen we besluiten dat  $t$  en  $t'$  elk in hoogstens één verzadigde zandloper van  $H$  liggen, hierdoor zal elke zandloper die  $e$  bevat ook  $t$  of  $t'$  bevatten als eerste of tweede driehoek. Elke boog is dus bevat in maximaal twee zandlopers van  $H$ .
2. Voor een gegeven Hamiltoniaanse cykel  $C$  en een verzadigde zandloper  $Z \in H$  weten we nu dat elke boog van  $Z$  in maximaal twee verzadigde zandlopers van  $H$  bevat is, waarvan er een de zandloper  $Z$  zelf is. Dus zijn er maximaal vier zandlopers die overlappen met de gegeven zandloper en allen verzadigd worden door  $C$ .

□

**Stelling 3.11.** *Gegeven een triangulatie  $T = (V, E)$  met  $|V| = p$  zonder splitsende driehoeken en een gegeven driehoek  $t_0$  van  $T$ . Dan zijn er minstens  $\frac{6p-21}{4}$  Hamiltoniaanse cyclen van  $G$  die een boog in de rand van  $t_0$  hebben.*

**Bewijs.** Stel dat  $H_{t_0}$  een ijle verzameling zandlopers is die ook ijl is voor  $t_0$ . In Stelling 3.9 toonden we aan dat  $H_{t_0}, r$  een telbasis is voor de verzameling  $\tilde{C}_{t_0}$  van Hamiltoniaanse cyclen van  $T$  die een boog in de rand van  $t_0$  bevatten. In Stelling 3.5 werd de grootte van  $H_{t_0}$  bepaald, deze is  $6p - 21$ . De overlap bepaalden we in Stelling 3.10 en bedraagt maximaal vier. Hierdoor kunnen we wegens Stelling 2.4 besluiten dat  $|\tilde{C}_{t_0}| \geq \frac{6p-21}{4}$ . □

**Stelling 3.12.** *Gegeven een triangulatie  $T = (V, E)$  met  $|V| = p$  en juist één splitsende driehoek, dan zijn er minstens  $\frac{6p-27}{4}$  Hamiltoniaanse cyclen in  $T$ .*

**Bewijs.** Stel dat  $t_0$  de splitsende driehoek is en  $T_i$  en  $T_o$  de triangulaties zijn die geïnduceerd worden door alle toppen van  $t_0$  en deze aan de binnen- of buitenkant van  $t_0$  respectievelijk. De deelgrafen  $T_i$  en  $T_o$  zijn ofwel 4-samenhangende triangulaties ofwel  $K_4$ , de complete graaf op vier toppen.  $T_o$  en  $T_i$  hebben samen  $p + 3$  toppen (de toppen van  $t_0$  worden dubbel geteld), dus heeft een van de twee grafen minstens  $\frac{p+3}{2}$  toppen, stel zonder verlies van algemeenheid dat dit  $T_o$  is.

Als  $T_o$  en  $T_i$  beiden  $K_4$  zijn, moeten we bewijzen dat het aantal Hamiltoniaanse cyclen minstens één bedraagt, dit zien we snel in.

Stel nu dat  $T_o$  een 4-samenhangende graaf is en  $T_i$  is  $K_4$ .  $T_o$  heeft  $p - 1$  toppen dus weten we door Stelling 3.11 dat er minstens  $\frac{6(p-1)-21}{4} = \frac{6p-27}{4}$  cykels zijn met een boog in de rand van  $t_0$ . We kunnen elk van deze cykels uitbreiden tot een Hamiltoniaanse cykel van  $T$  door de boog in de rand van  $t_0$  weg te laten en de twee toppen adjacent met deze boog te verbinden met de top van  $T_i$  die geen element is van  $t_0$ .

Nu kunnen we aannemen dat zowel  $T_i$  als  $T_o$  4-samenhangende triangulaties zijn. Wegens Stelling 3.11 zijn er minstens  $\frac{6\frac{p+3}{2}-21}{4} = \frac{3p-12}{4}$  Hamiltoniaanse cykels in  $T_o$  met een boog in de rand van  $t_0$ . Kies een zekere Hamiltoniaanse cykel  $C$  in  $T_o$ . Stel  $t_0 = \{v_1, v_2, v_3\}$  en  $C \cap t_0 = \{v_1, v_2\}$ . Wegens Stelling 3.7 gaan er zeker twee cykels van  $T_i$  door  $\{v_1, v_3\}, \{v_2, v_3\}$ . Dus voor elk zo'n cykel  $C'$  van  $T_i$  is  $C_e = (C \setminus \{v_1, v_2\}) \cup (C' \setminus \{\{v_1, v_3\}, \{v_2, v_3\}\})$  een Hamiltoniaanse cykel van  $T$ . Vanuit een  $C_e$  kunnen we makkelijk  $C$  en  $C'$  terug construeren, zo concluderen we dat verschillende Hamiltoniaanse cykels van  $T_o$  en/of  $T_i$  altijd leiden tot verschillende Hamiltoniaanse cykels van  $T$ . Hieruit volgt dat  $T$  minstens  $2 \cdot \frac{3p-12}{4} = \frac{6p-24}{4} > \frac{6p-27}{4}$  Hamiltoniaanse cykels bevat.  $\square$

# Hoofdstuk 4

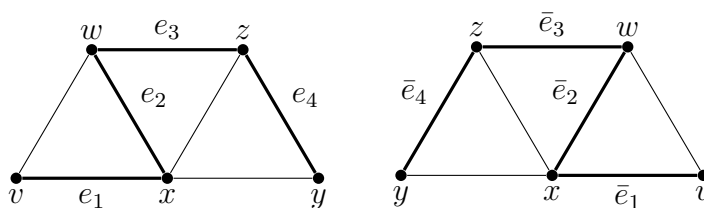
## Geen splitsende driehoek

Dit hoofdstuk is, net als het vorige, gebaseerd op [1]. Hier zijn de grafen echter 4-samenhangend, ze bevatten dus geen splitsende driehoeken.

**Definitie 4.1.** Een **wortelpad** is een pad startend bij een top  $v$ , die een boog  $e_1$  incident met  $v$  volgt, vervolgens nemen we de eerste boog met de klok mee, daarna de eerste boog tegen de klok in en ten slotte de tweede boog tegen de klok in.

**Definitie 4.2.** Een **invers wortelpad** is een pad startend bij een top  $v$ , die een boog  $e_1$  incident met  $v$  volgt, vervolgens nemen we de eerste boog tegen de klok in, daarna de eerste boog met de klok mee en ten slotte de tweede boog met de klok mee.

In Figuur 4.1 wordt een wortelpad en een invers wortelpad voorgesteld. Ook krijgen de toppen en bogen een label. De gerichte bogen  $(v, x)$ ,  $(x, w)$ ,  $(w, z)$  en  $(z, y)$  van het wortelpad zullen we respectievelijk noteren als  $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$  en  $\vec{e}_4$ . Een gerichte boog in de omgekeerde richting noteren we als volgt  $(x, v) = \vec{e}_1^{-1}$ . Om niet-geï Orienteerde bogen te labelen zullen we  $e_1$  schrijven als we de boog  $\{v, x\}$  bedoelen en analoog voor de andere bogen. Voor de bogen van het inverse wortelpad geldt analoge notatie en hebben we gerichte bogen  $\vec{\bar{e}}_1, \vec{\bar{e}}_2, \vec{\bar{e}}_3$  en  $\vec{\bar{e}}_4$ .



Figuur 4.1: Wortelpad  $s$  en invers wortelpad  $r(s)$

We definiëren  $S_T$  als de verzameling van alle wortelpaden en inverse wortelpaden voor een gegeven 4-samenhangende triangulatie  $T$ . We definiëren  $r$  als de afbeelding die elk wortelpad afbeeldt op het inverse wortelpad lopend over dezelfde toppen. Analoog is het beeld onder de functie  $r$  van elk invers wortelpad het wortelpad op dezelfde toppen.

**Stelling 4.3.** *Voor een gegeven 4-samenhangende triangulatie  $T$  beschouwen we de verzameling  $S_T$  samen met  $r$ . Dit is een telbasis voor de verzameling van alle Hamiltoniaanse cykels  $\bar{C}$ .*



Als bogen of toppen bepaalde namen hebben, dan gebruiken we de notatie zoals deze geïntroduceerd werd bij Figuur 4.1.

**Bewijs.**

1. Als we Stelling 3.6 toepassen met  $t = \{x, v, w\}$ ,  $t' = \{x, w, z\}$  en  $t'' = \{x, z, y\}$ , zien we eenvoudig in dat elk element van  $S_T$  verzadigd wordt door een Hamiltoniaanse cykel.
2. Van de tweede voorwaarde is de eis dat  $s \not\subseteq r(s)$  triviaal aangezien de boog  $e_1$ , als  $s$  een wortelpad is, of de boog  $\bar{e}_1$ , als  $s$  een invers wortelpad is, wel in  $s$  zit maar niet in  $r(s)$ . Voor een  $C$  die  $s$  verzadigt moet  $z(C, s)$  nog steeds een Hamiltoniaanse cykel zijn. Er wordt een pad van lengte vier verwijderd en vervolgens wordt een pad van lengte vier met dezelfde begin- en eindtop en over dezelfde toppen toegevoegd, hierdoor zijn we zeker dat  $z(C, s)$  een Hamiltoniaanse cykel is.
3. Als  $s_1, s_2 \in S$  met  $s_1 \neq s_2$  dan zit zeker en vast de eerste of de vierde boog van  $s_1$  niet in  $s_2$  maar wel in  $C$ , de Hamiltoniaanse cykel die  $s_1$  en  $s_2$  verzadigt. Dus deze boog is bevat in  $z(C, s_2)$  maar niet in  $z(C, s_1)$  waardoor deze niet gelijk zijn.

□

**Stelling 4.4.** *Voor elke 4-samenhangende triangulatie  $T = (V, E)$  waarbij  $|V| = p \geq 7$  geldt dat  $o(S_T, r) \leq 5$ . Als de overlap van een (invers) wortelpad vijf bedraagt dan moet  $\deg v = \deg z = 4$  en  $\deg x, \deg y \geq 5$ .*

**Bewijs.** Alle elementen van  $S_T$  zijn wortelpaden en inverse wortelpaden. We moeten elke mogelijke overlap bekijken die kan optreden waarbij ook geldt dat de unie een deel zou kunnen zijn van een Hamiltoniaanse cykel in de triangulatie  $T$ .

We nemen een vast wortelpad met labels zoals in Figuur 4.1. Verder beschouwen we ook een tweede wortelpad  $r'$  met bogen  $e'_1, e'_2, e'_3, e'_4$  en een invers wortelpad  $\bar{r}$  met bogen  $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3, \bar{e}_4$ . De doorsnede of intersectie kunnen we nu beschrijven door gerichte bogen op elkaar af te beelden. Wel moet gezegd worden dat elke doorsnede gerepresenteerd wordt door de doorsnede van de boog met de kleinste index van  $r'$  of  $\bar{r}$ .

Alle mogelijke doorsnedes worden voorgesteld in Tabel 4.1. Een streepje betekent dat hierdoor geen intersectie gerepresenteerd wordt. Onmogelijk (onm.) schrijven we als die intersectie nooit kan overeenkomen met een deel van een Hamiltoniaanse cykel. In de andere gevallen staat er een verwijzing naar een van de gevallen uit Figuur 4.2.

Uitbreiding  $a, b$  en  $c$  noemen we linkse uitbreidingen. Uitbreiding  $a$  is de enige mogelijkheid aan de linkerkant waarbij er twee wortelpaden zijn die in minstens één boog overlappen met het oorspronkelijke wortelpad en op een deel van een Hamiltoniaanse cykel (voorgesteld door de stippellijn) kunnen liggen. Uitbreiding  $d$  en  $e$  noemen we rechtse uitbreidingen. Uitbreiding  $d$  is de enige mogelijkheid aan de rechterkant waarbij er twee wortelpaden zijn die in minstens één boog overlappen met het oorspronkelijke wortelpad en op een deel van een Hamiltoniaanse cykel kunnen liggen.

Het slechtste geval qua overlap is dus dat de Hamiltoniaanse cykel aan de linkerkant verder gaat zoals in (a) en aan de linkerkant zoals in (d). Dan hebben we reeds vier

	$\vec{e}_1$	$\vec{e}_2$	$\vec{e}_3$	$\vec{e}_4$	$\vec{e}_1^{-1}$	$\vec{e}_2^{-1}$	$\vec{e}_3^{-1}$	$\vec{e}_4^{-1}$
$\vec{e}_1$	id	onm.	onm.	(d)	(b)	onm.	(a)	onm.
$\vec{e}_2$	onm.	-	-	-	-	-	-	onm.
$\vec{e}_3$	onm.	-	-	-	-	-	-	(d)
$\vec{e}_4$	(a)	-	-	-	-	-	-	(e)
$\vec{e}_1$	onm.	onm.	onm.	onm.	onm.	onm.	onm.	onm.
$\vec{e}_2$	onm.	-	-	-	-	-	-	onm.
$\vec{e}_3$	(c)	-	-	-	-	-	-	onm.
$\vec{e}_4$	onm.	-	-	-	-	-	-	onm.

Tabel 4.1: Mogelijke doorsnedes

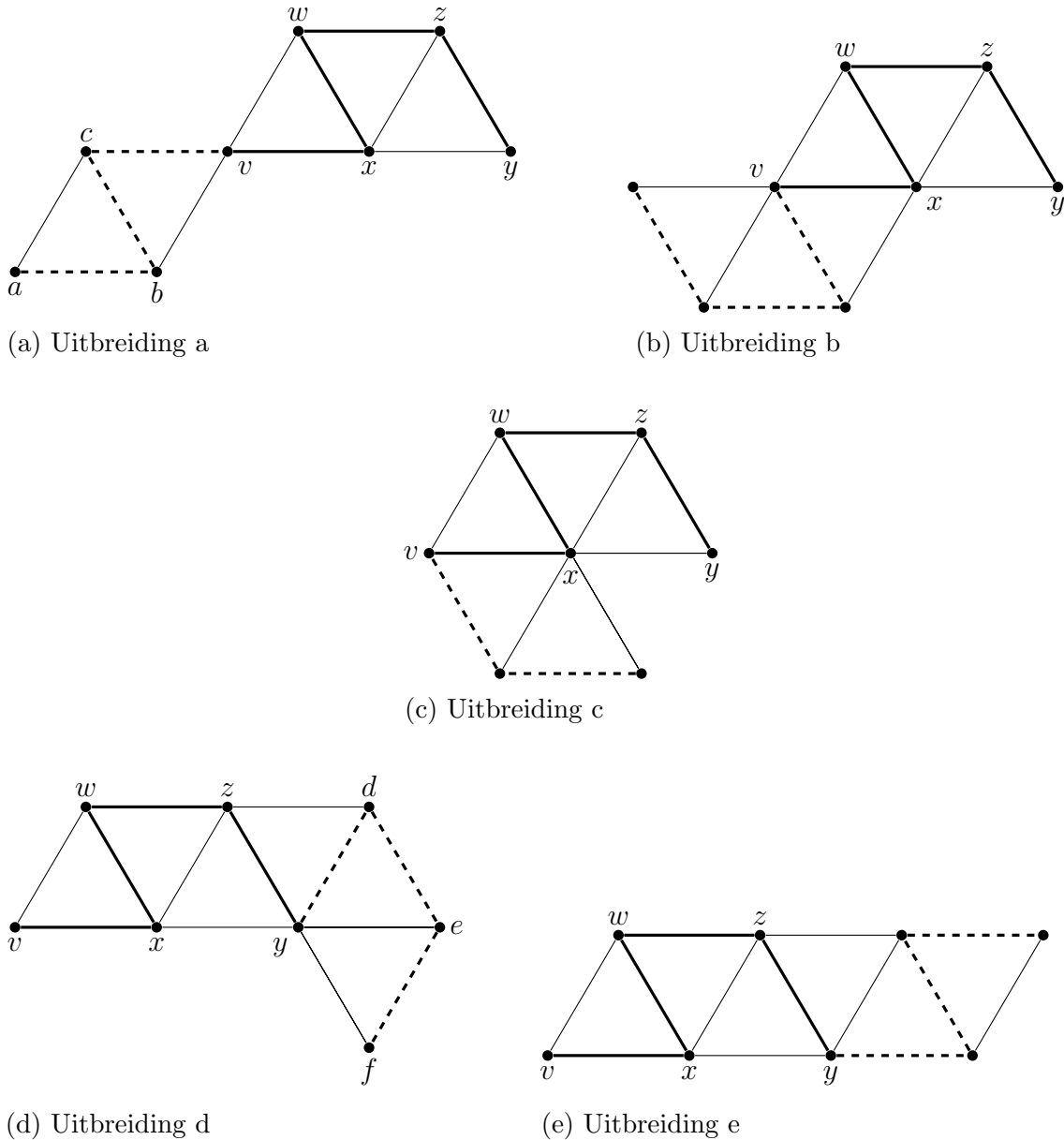
overlappende wortelpaden. Verder moet de identieke, het wortelpad zelf, ook nog meegeteld worden wat ons een grens van vijf oplevert voor de maximale overlap met een gegeven wortelpad. Voor inverse wortelpaden zullen de resultaten niet anders zijn, dus  $o(S_T, r) \leq 5$ .

Indien de overlap vijf is kunnen we hierdoor enkele eisen op de graden van de toppen afleiden

- De doorsnede van de wortelpaden gerepresenteerd door  $\vec{e}_3 = \vec{e}_4^{-1}$  impliceert dat  $e_3$  de tweede boog tegen de klok in is vertrekkende van  $e_4$ . Ook was  $e_4$  de tweede boog tegen de klok in vertrekkende van  $e_4$ . Bijgevolg moet de graad van  $z$  vier zijn.
- De doorsnede van de wortelpaden gerepresenteerd door  $\vec{e}_1 = \vec{e}_4^{-1}$  impliceert dat de graad van  $y$  minstens vijf is. Indien de graad van  $y$  vier zou zijn, dan vallen  $f$  en  $x$  samen, zodus kan dit geen deel zijn van een Hamiltoniaanse cykel.
- De doorsnede van de wortelpaden gerepresenteerd door  $\vec{e}_4 = \vec{e}_1$  impliceert dat de graad van  $x$  minstens vijf is. Indien de graad van  $x$  vier zou zijn, dan vallen  $b$  en  $y$  samen, zodus kan dit geen deel zijn van een Hamiltoniaanse cykel.
- De doorsnedes van de wortelpaden gerepresenteerd door  $\vec{e}_4 = \vec{e}_1$  en  $\vec{e}_1 = \vec{e}_3^{-1}$  impliceren dat  $e_1$  de tweede boog tegen de klok in is vertrekkende van  $\{c, v\}$  en ook dat  $\{c, v\}$  de tweede boog tegen de klok in is vertrekkende van  $e_1$ . Bijgevolg moet de graad van  $v$  vier zijn.

□

De zonet bewezen eisen op de graden van de toppen zijn niet nodig om aan te tonen dat de maximale overlap vijf bedraagt en worden niet vermeld in [1]. Toch doen we dit om in het volgende hoofdstuk hierop te kunnen verder bouwen.



Figuur 4.2: Linkse uitbreidingen a,b en c en rechtse uitbreidingen d en e

**Stelling 4.5.** Een 4-samenhangende triangulatie  $T = (V, E)$  met  $|V| = p$  heeft minstens  $\frac{12}{5}(p-2)$  Hamiltoniaanse cykels.

**Bewijs.** In dit bewijs zullen we Stelling 2.4 gebruiken. In Stelling 4.4 bepaalden we een bovengrens op de overlap  $o(S_T, r) \leq 5$ . Er rest ons nog aan te tonen wat de grootte van  $|S|$  is. Wegens Lemma 2.2 weten we dat het aantal manieren om een boog  $e$  te kiezen  $3(p-2)$  is. Nu kunnen we op twee manieren een top  $v$  kiezen zodat  $v$  de starttop is van het wortelpad of het invers wortelpad. Dus zijn er  $3(p-2) \cdot 2 \cdot 2$  elementen in  $S_T$  die nooit gelijk kunnen zijn. Na toepassing van Stelling 2.4 besluiten we dat het aantal Hamiltoniaanse cykels minstens  $\frac{12}{5}(p-2)$  bedraagt.  $\square$

# Hoofdstuk 5

## Nieuwe resultaten

In dit deel zullen we Stelling 2.4 veralgemenen. Dit doen we om de verzameling  $S$  te kunnen splitsen op basis van maximale overlap. Hoe kleiner de maximale overlap voor sommige deelgrafen, des te meer Hamiltoniaanse cykels we zeker hebben.

**Definitie 5.1.** Een **partitie**  $S_1, S_2, \dots, S_k$  van een gegeven verzameling  $S$  is een opdeling in niet-lege onderling disjuncte delen waarbij  $\bigcup_{i=1}^k S_i = S$ .

**Definitie 5.2.** Gegeven een telbasis  $S, r$  voor  $\bar{C}$  en  $G$  en stel dat  $S_1, S_2, \dots, S_k$  een partitie van  $S$  is dan definiëren we

$$o(S, S_i, r) = \max\{o(C, s) \mid C \in \bar{C} \text{ verzadigt } s \in S_i\}.$$

**Stelling 5.3.** *Gegeven een graaf  $G$ , een verzameling  $\bar{C}$  van Hamiltoniaanse cykels van  $G$ , een niet-ledige telbasis  $S, r$  voor  $\bar{C}$  en  $G$  en  $S_1, S_2, \dots, S_k$  een partitie van  $S$ , dan geldt dat*

$$|\bar{C}| \geq \sum_{i=1}^k |S_i| \frac{2}{o(S, r) + o(S, S_i, r)}.$$

**Bewijs.**

Voor een zekere  $s \in S$  noteren we de verzameling van alle  $C \in \bar{C}$  die  $s$  verzadigen als  $\bar{C}_s$ . Voor een gegeven Hamiltoniaanse cykel  $C \in \bar{C}$  is  $m(C)$  gelijk aan het aantal  $s \in S$  die verzadigd worden door deze  $C$ . We krijgen nu

$$|\bar{C}| = \sum_{C \in \bar{C}} 1 \geq \sum_{\substack{C \in \bar{C} \\ m(C) > 0}} \frac{m(C)}{m(C)} = \sum_{s \in S} \sum_{C \in \bar{C}_s} \frac{1}{m(C)}.$$

Hier geldt de gelijkheid aangezien aan beide kanten gesommeerd wordt over het aantal koppels  $(C, s)$  waarvoor  $s \subseteq C$  aangezien  $C \in \bar{C}_s$ . Ook kan  $m(C)$  nooit nul zijn aangezien we eerst over  $s$  sommeren.

Aangezien we een partitie van  $S$  hebben, kan deze som ook als volgt herschreven worden

$$\sum_{s \in S} \sum_{C \in \bar{C}_s} \frac{1}{m(C)} = \sum_{i=1}^k \sum_{s \in S_i} \sum_{C \in \bar{C}_s} \frac{1}{m(C)}.$$

We willen nu voor elke  $s \in S$  bewijzen dat

$$\sum_{C \in \bar{C}_s} \frac{1}{m(C)} \geq \frac{2}{o(S, r) + o(S, S_i, r)}$$

met  $S_i$  het deel van  $S$  waartoe  $s$  behoort. Stel dat  $C'$  een Hamiltoniaanse cykel is die  $s$  verzadigt. Vanaf hier bekijken we twee gevallen.

- Ofwel is  $m(C') \leq o(S, S_i, r)$  dan weten we dat  $\frac{1}{o(S, S_i, r)} \leq \frac{1}{m(C')}$ . Hieruit volgt direct dat  $\sum_{C \in \bar{C}_s} \frac{1}{m(C)} \geq \frac{1}{o(S, S_i, r)}$  en dus geldt ook dat

$$\sum_{C \in \bar{C}_s} \frac{1}{m(C)} \geq \frac{2}{o(S, r) + o(S, S_i, r)}$$

aangezien  $o(S, S_i, r) \leq o(S, r)$ .

- Het andere geval dat we beschouwen is wanneer  $m(C') > o(S, S_i, r)$ . Dan is

$$\sum_{C \in \bar{C}_s} \frac{1}{m(C)} \geq \frac{1}{m(C')} + \sum_{\substack{s' \in C' \\ s' \cap s = \emptyset}} \frac{1}{m(z(C', s'))} \quad (5.1)$$

omdat  $C' \cup z(C', s') \subseteq \bar{C}_s$  geldt als  $s' \cap s = \emptyset$ . Het aantal deelgrafen op een gegeven Hamiltoniaanse cykel kan men als volgt afschatten:

$$m(z(C', s')) \leq m(C') + o(S, r) - 1.$$

Dit geldt aangezien er zeker  $m(C')$  deelgrafen gesatureerd werden door  $C'$ . Er kwamen maximaal  $o(S, r)$  deelgrafen bij wanneer  $s'$  vervangen werd door  $r(s')$  aangezien dit de maximale overlap is, ook wordt  $s'$  zelf niet meer gesatureerd door  $z(C', s')$ .

Het aantal termen in de som in het rechterlid van 5.1 bedraagt minstens  $m(C') - o(S, S_i, r)$  aangezien de overlap met  $s$  (en dus de uitgesloten deelgrafen) hoogstens  $o(S, S_i, r)$  bedraagt als  $s \in S_i$ . Zo kan 5.1 herschreven worden als

$$\frac{1}{m(C')} + \sum_{\substack{s' \in C' \\ s' \cap s = \emptyset}} \frac{1}{m(z(C', s'))} \geq \frac{1}{m(C')} + \frac{m(C') - o(S, S_i, r)}{m(C') + o(S, r) - 1}. \quad (5.2)$$

De som in het rechterlid van 5.2 kan verkleind worden tot

$$\frac{1 + m(C') - o(S, S_i, r)}{m(C') + o(S, r) - 1}.$$

We zoeken nu voor welke  $m(C')$  deze uitdrukking zijn minimum bereikt (nog steeds onder de voorwaarde dat  $m(C') > o(S, S_i, r)$ ). Het minimum wordt bereikt wanneer  $m(C') = o(S, S_i, r) + 1$ , ingevuld levert dit

$$\frac{1 + o(S, S_i, r) + 1 - o(S, S_i, r)}{o(S, S_i, r) + 1 + o(S, r) - 1} = \frac{2}{o(S, S_i, r) + o(S, r)}.$$

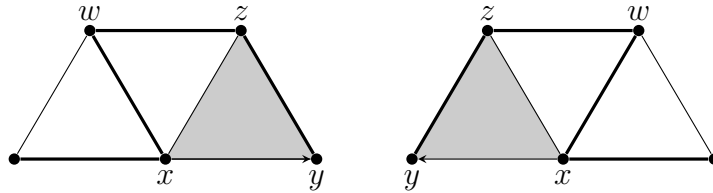
Uit deze twee gevallen kunnen we concluderen dat

$$|\bar{C}| \geq \sum_{i=1}^k |S_i| \frac{2}{o(S, r) + o(S, S_i, r)}.$$

□

Met deze stelling komt het erop aan om een goede partitie van  $S$  te vinden. Ook volgt Stelling 2.4 nu onmiddellijk aangezien  $o(S, S_i, r) \leq o(S, r)$  steeds geldt.

Identificeer met elke driehoek tezamen met een gerichte boog een wortelpad of invers wortelpad via volgende constructie. Stel dat de gerichte boog  $(x, y)$  is en de andere top van de driehoek  $z$  is. Noem de top adjacent met  $x$  en  $z$  die niet  $y$  is  $w$ . Als  $opv(x, z) = (x, y)$ , dan bestaat het wortelpad uit de bogen  $\{opv^{-1}(x, w)\}$ ,  $\{x, w\}$ ,  $\{w, z\}$  en  $\{z, y\}$ . Indien  $opv(x, z) \neq (x, y)$ , dan karakteriseert dit een invers wortelpad, namelijk dat met bogen  $\{opv(x, w)\}$ ,  $\{x, w\}$ ,  $\{w, z\}$  en  $\{z, y\}$ . Dit wordt voorgesteld in Figuur 5.1.



(a) Wortelpad  $s$  gekarakteriseerd door  $(x, y)$  en de driehoek  $\{x, y, z\}$   
 (b) Invers wortelpad  $r(s)$  gekarakteriseerd door  $(x, y)$  en de driehoek  $\{x, y, z\}$

Figuur 5.1: Identificatie met (inverse) wortelpaden

**Notatie 5.4.** We schrijven dat een gerichte boog een  $(a, b)$ -boog is, indien de starttop graad  $a$  heeft en de eindtop graad  $b$ . Indien  $a$  of  $b$  onderlijnd worden, dan moet de bijhorende top minstens graad  $a$  respectievelijk  $b$  hebben.

**Stelling 5.5.** *Indien een (invers) wortelpad van een 4-samenhangende triangulatie overlap vijf heeft, beschouw dan zijn karakteriserende driehoek. Er zal nog één gerichte boog zijn waarbij de grens voor overlap van het ermee corresponderende (invers) wortelpad vijf is. Ook zijn er zijn twee gerichte bogen corresponderend met een (invers) wortelpad waarvoor de bovengrens voor de overlap vier is en voor de twee (inverse) wortelpaden corresponderend met de resterende gerichte bogen is de bovengrens voor de overlap drie.*

*Bewijs.* In Stelling 4.4 staan de voorwaarden die nodig zijn om overlap vijf te kunnen bekomen. De graad van de toppen  $x$  en  $y$  is minstens vijf en de graad van de toppen  $z$  en  $v$  is vier. De notatie van de toppen is hetzelfde gekozen als deze voor de karakterisatie van (inverse) wortelpaden.

Indien we een andere boog als gerichte boog beschouwen, dan hernoemen we ook de andere toppen. De starttop van de gerichte boog noemen we  $x'$ , de eindtop  $y'$ . De overblijvende top van de driehoek noemen we  $z'$ .

De karakteriserende driehoek  $\{x, y, z\}$  is ook met een aantal andere gerichte bogen incident dan  $(x, y)$ , de boog die overeenkomt met het (invers) wortelpad dat overlap vijf heeft.

- De enige andere gerichte boog in deze driehoek die als grens voor de overlap vijf heeft is  $(y, x)$  aangezien de voorwaarden op de graden voldaan blijven.
- De  $(\underline{5}, 4)$ -bogen zullen vier hebben als grens voor de overlap. Er kunnen namelijk geen twee wortelpaden aan de rechterkant zijn die overlappen en een deel kunnen zijn van eenzelfde Hamiltoniaanse cykel aangezien  $\deg y' = 4$ .
- De  $(4, \underline{5})$ -bogen impliceren een grens van drie voor de overlap. De graad van  $x'$  is vier, hierdoor kunnen er aan de linkerkant geen twee overlappende wortelpaden zijn die deel kunnen zijn van eenzelfde Hamiltoniaanse cykel. De graad van  $z'$  is ten minste vijf wat impliceert dat er ook aan de rechterkant geen twee overlappende wortelpaden zijn die deel kunnen zijn van eenzelfde Hamiltoniaanse cykel.

□

**Stelling 5.6.** *Een 4-samenhangende triangulatie  $T = (V, E)$  met  $|V| = p \geq 7$  heeft minstens  $\frac{8}{3}(p - 2)$  Hamiltoniaanse cycli.*

*Bewijs.* Voor het bewijs zullen we Stelling 5.3 gebruiken. Alle (inverse) wortelpaden zullen we bekijken via hun karakteriserende driehoek. De verzameling van alle driehoeken in de triangulatie  $T$  noemen we  $F$ . De verzameling  $F$  kan gepartitioneerd worden in  $F_1$  bestaande uit alle driehoeken waarbij er minstens één gerichte boog is die overlap vijf heeft en  $F_2$  bestaande uit de overige driehoeken waarbij overlap vijf voor geen enkele gerichte boog mogelijk is. In deze stelling zullen we driehoeken tellen waarbij elke driehoek zes incidenties met gerichte bogen heeft en zo in totaal drie wortelpaden en drie inverse wortelpaden voorstelt. Wegens Stelling 5.5 kunnen we  $F_1$  nog verder partitioneren. Per driehoek zullen er twee (inverse) wortelpaden gehecht aan gerichte bogen een grens van vijf voor de overlap hebben en analoog voor grenzen vier en drie. Dit geeft

$$|\bar{C}| \geq |F_1| \left( 2 \cdot \frac{2}{5+5} + 2 \cdot \frac{2}{5+4} + 2 \cdot \frac{2}{5+3} \right) + |F_2| \cdot 6 \cdot \frac{2}{5+4}.$$

Uitgewerkt geeft dit

$$|\bar{C}| \geq \frac{121}{90}|F_1| + \frac{4}{3}|F_2|.$$

Het totale aantal driehoeken bedraagt  $2(p-2)$  wegens Lemma 2.2. De coëfficiënt horend bij de grootte van  $F_2$  is de kleinste, in het slechtste geval behoren alle driehoeken dus tot  $F_2$ . We bekommen dat een 4-samenhangende triangulatie minstens  $\frac{8}{3}(p - 2)$  Hamiltoniaanse cycli bevat. □

In het bewijs van voorgaande stelling gaan we uit van het slechtste geval. Kan dit geval zich ook effectief voordoen en hoe ziet zo'n driehoek eruit die voor elk (invers) wortelpad gehecht aan een gerichte boog een grens van vier heeft voor de overlap?

**Stelling 5.7.** *De enige driehoek van een 4-samenhangende triangulatie waarbij alle (inverse) wortelpaden geassocieerd aan gerichte bogen een grens van vier voor de overlap hebben, is een driehoek waarbij alle toppen minstens graad vijf hebben (dit zullen we een slechte driehoek noemen). Hierbij zal de starttop van elk (invers) wortelpad geassocieerd aan een gerichte boog van de driehoek graad vier hebben.*

*Bewijs.* Deze stelling bewijzen we door het elimineren van alle andere mogelijke soorten driehoeken.

- In Stelling 5.5 bewezen we reeds dat een driehoek, die juist één top heeft met graad vier en waarbij de andere toppen minstens graad vijf hebben, zeker twee gerichte bogen bevat waarbij de grens voor de overlap drie is.
- Indien we een driehoek hebben die minstens twee toppen bevat die graad vier hebben, dan is er ook een gerichte boog tussen deze toppen. Het (invers) wortelpad dat hieraan gehecht is zal een maximale overlap hebben die hoogstens drie is aangezien er voor zowel de linker- als de rechteruitbreiding één voorwaarde uit Stelling 4.4 niet voldaan is.

De enige overblijvende soort driehoeken zijn deze waarbij elke top minstens graad vijf heeft. Om maximale overlap vier te kunnen bereiken zal de starttop van elk (invers) wortelpad wel graad vier moeten hebben. Indien een starttop minstens graad vijf heeft, zijn er namelijk opnieuw voorwaarden voor zowel de linker- als de rechteruitbreiding van Stelling 4.4 niet voldaan wat overlap drie impliceert.  $\square$

Aangezien we nu weten dat er altijd toppen met graad vier in de buurt zijn van zo'n slechte driehoek, zoeken we een verhouding die weergeeft hoeveel slechte driehoeken er kunnen zijn ten opzichte van het totale aantal driehoeken in een triangulatie.

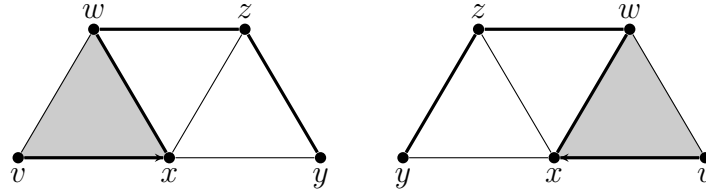
**Stelling 5.8.** *In een 4-samenhangende triangulatie  $T = (V, E)$  met  $|V| = p$  zijn er hoogstens  $\frac{1}{2}(p - 2)$  slechte driehoeken.*

*Bewijs.* Elke slechte driehoek representeert zes (inverse) wortelpaden. Wegens Stelling 5.7 geldt voor elk (invers) wortelpad van deze driehoek dat de eerste boog,  $\vec{e}_1$  of  $\vec{e}_1$  (wederom worden de notaties uit Figuur 4.1 gebruikt), een  $(4, \underline{5})$ -boog moet zijn als we vier willen hebben als grens voor de overlap. We beelden elk (invers) wortelpad van een slechte driehoek, gerepresenteerd door die driehoek en een gerichte boog, nu af op de driehoek  $\{x, v, w\}$  en de gerichte  $(4, \underline{5})$ -boog  $(v, x)$  zoals in Figuur 5.2.

Alle gerichte bogen van een slechte driehoek worden afgebeeld op zes gerichte bogen in zes verschillende driehoeken. Deze driehoeken zijn zeker geen slechte driehoeken aangezien ze elk minstens één top bevatten met graad vier.

Afhankelijk van de graad van  $w$  zijn ofwel  $(v, w)$  en  $(v, x)$  de enige  $(4, \underline{5})$ -bogen ofwel  $(w, x)$  en  $(v, x)$  van zo'n driehoek in het beeld. Elke driehoek die niet slecht is kan dus hoogstens twee keer bereikt worden aangezien de gerichte boog van het beeld steeds





(a) Beeld van een wortelpad  $s$  gekarakteriseerd door  $(x, y)$  en  $\{x, y, z\}$   
 (b) Beeld van een invers wortelpad  $r(s)$  gekarakteriseerd door  $(x, y)$  en  $\{x, y, z\}$

Figuur 5.2: Beeld van een karakteristieke driehoek en een gerichte boog

een  $(4, \bar{5})$ -boog is.

Hierdoor is het aantal slechte driehoeken hoogstens één derde van het aantal andere driehoeken, dus hoogstens een vierde van het totale aantal driehoeken kan slecht zijn wat  $\frac{1}{4}|F| = \frac{p-2}{2}$  slechte driehoeken geeft in het slechtste geval.  $\square$

**Stelling 5.9.** *Een 4-samenhangende triangulatie  $T = (V, E)$  met  $|V| = p \geq 7$  heeft minstens  $\frac{161}{60}(p-2)$  Hamiltoniaanse cykels.*

*Bewijs.* In het bewijs van Stelling 5.6 gingen we ervan uit dat alle driehoeken slechte driehoeken konden zijn. Echter weten we dankzij Stelling 5.8 dat er hoogstens  $\frac{p-2}{2}$  slechte driehoeken zijn. De verzameling  $F_2$  is die van alle slechte driehoeken. Nu moeten we op zoek naar het op één na slechtste geval, met andere woorden de tweede kleinste coëfficiënt. Ofwel hoort deze coëfficiënt bij de driehoek waar de grens op overlap vijf is, dan is deze coëfficiënt hoogstens  $2(\frac{2}{10} + \frac{2}{9} + \frac{2}{8})$ , ofwel bij de driehoek waarin juist één (invers) wortelpad drie heeft als grens voor de overlap en de andere vijf (invers) wortelpaden vier hebben als grens voor de overlap:  $5\frac{2}{9} + \frac{2}{8}$ . De eerste coëfficiënt is kleiner en dus is het slechtst mogelijke geval datgene waarbij alle driehoeken die niet in  $F_2$  zitten een gerichte boog hebben die overlap vijf impliceert als alle grenzen voor de overlap ook effectief bereikt worden. Deze verzameling noemen we  $F_1$  en bestaat dan uit minstens  $\frac{3}{2}(p-2)$  driehoeken. Ingevuld geeft dit

$$|\bar{C}| \geq \frac{121}{90} \cdot \frac{3}{2}(p-2) + \frac{4}{3} \cdot \frac{p-2}{2} = \frac{161}{60}(p-2).$$

$\square$

# Besluit

Deze thesis verbetert de bestaande lineaire ondergrens door Brinkmann, Souffriau en Van Cleemput. Bijkomend onderzoek kan de constanten mogelijks nog verbeteren. De weg naar de echte oplossing, die vermoedelijk kwadratisch is, is echter nog lang. Hiervoor zijn nieuwe en meer geavanceerde technieken nodig.

# Appendix A

## Abstract

In 1931 Whitney proved that each 4-connected triangulation has at least one hamiltonian cycle.

Hakimi, Schmeichel and Thomassen proved in 1979 that if the 4-connected triangulation has  $p$  vertices, there are at least  $\frac{p}{\log_2 p}$  hamiltonian cycles.

In 2014 Brinkmann, Souffriau and Van Cleemput wrote an article in which they proved a linear lower bound. The main concepts for this proof are counting bases and (maximal) overlap. We used these concepts in this thesis.

- Given a graph  $G$ , a set  $S$  of subgraphs of  $G$  and a set  $\bar{C}$  of hamiltonian cycles of  $G$ . The set  $S$  together with a function  $r$  is called a **counting base** for  $\bar{C}$  and  $G$  if the following properties are fulfilled:

1. for all  $s \in S$  there is a hamiltonian cycle  $C \in \bar{C}$  saturating  $s$ ,
2. for all  $s \in S$ ,  $r(s)$  is a subgraph of  $G$  so that  $s \not\subseteq r(s)$  and for each hamiltonian cycle  $C \in \bar{C}$  saturating  $s$  we have that  $z(C, s) = (C \setminus s) \cup r(s)$  is a hamiltonian cycle  $C \in \bar{C}$ ,
3. for all  $s_1 \neq s_2, s_1, s_2 \in S$  and  $C$  saturating  $s_1$  and  $s_2$  we have that  $z(C, s_1) \neq z(C, s_2)$ .

- Let  $\bar{S} = S \cup \{r(s) \mid s \in S\}$ .

For a given counting base  $S, r$  and hamiltonian cycle  $C \in \bar{C}$  saturating  $x \in \bar{S}$  we define the **overlap**  $o(C, x)$  as

$$o(C, x) = |\{s \in S \mid x \cap s \neq \emptyset \text{ and } s \subseteq C\}|.$$

- The **maximal overlap** is defined as

$$o(S, r) = \max\{o(C, s) \mid C \in \bar{C} \text{ saturates } s \in \bar{S}\}.$$

Brinkmann, Souffriau and Van Cleemput proved that given a graph  $G$ , a nonempty counting base  $S, r$  and a set  $\bar{C}$  of hamiltonian cycles of  $G$ . Then  $|\bar{C}| \geq \frac{|S|}{o(S, r)}$ , when

combining this theorem with the set of all (inverse) root paths (displayed with bold lines in Figure A.1), they managed to prove that  $|\bar{C}| \geq \frac{12}{5}(p-2)$ .

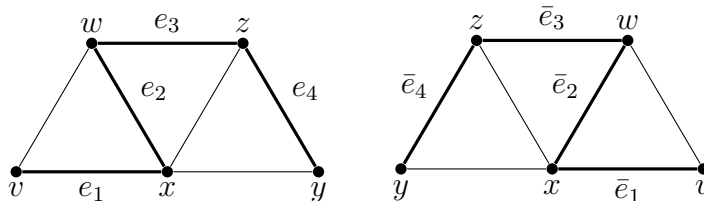


Figure A.1: Root path  $s$  and inverse root path  $r(s)$

In this thesis I managed to prove a more general theorem. Given a graph  $G$ , a set  $\bar{C}$  of hamiltonian cycles of  $G$  and a nonempty counting base  $S, r$  with  $S_1, S_2, \dots, S_k$  a partition of  $S$ . Then

$$|\bar{C}| \geq \sum_{i=1}^k |S_i| \frac{2}{o(S, r) + o(S, S_i, r)}$$

with

$$o(S, S_i, r) = \max\{o(C, s) \mid C \in \bar{C} \text{ saturates } s \in S_i\}.$$

By investigating the root paths that have overlap five and some specific triangles that only correspond to root paths with  $o(s, r) \leq 4$ , we obtain some properties. If we use these properties together with the more general theorem, we can prove that the number of hamiltonian cycles in a 4-connected triangulation is at least  $\frac{161}{60}(p-2)$  if  $p$  is the number of vertices.

With more advanced techniques, it might be possible to obtain further improvements on the constants. But with these techniques, we will not be able to prove quadratic lower bounds on the number of hamiltonian cycles.

# Bibliografie

- [1] Gunnar Brinkmann, Jasper Souffriau en Nico Van Cleemput. On the number of hamiltonian cycles in triangulations with few separating triangles. *Submitted for Journal of Graph Theory*.
- [2] Bill Jackson en Xingxing Yu. Hamilton cycles in plane triangulations. *Journal of Graph Theory*, 41(2): 138-150, 2002.
- [3] S. L. Hakimi, E. F. Schmeichel en C. Thomassen. On the number of Hamiltonian cycles in a maximal planar graph. *Journal of Graph Theory*, 3:365-370, 1979.
- [4] Guido Helden. Hamiltonicity of maximal planar graphs. *Ph.d. thesis, RWTH Aachen*, 2007.
- [5] H. Whitney, A theorem on graphs. *Annals of Mathematics*, 32:378-390, 1931.
- [6] H. Whitney, 2-isomorphic graphs. *Amer. J. Math.*, 55 (1933), 245-254.



