Faculteit Wetenschappen
Vakgroep Wiskunde

# Een studie van reguliere schierveelhoeken met behulp van algebraïsche combinatoriek

**Dries Hoste**

Promotor:
Bart De Bruyn

Masterproef ingediend ter behaling van de academische graad van master in de wiskunde, afstudeerrichting zuivere wiskunde

Academiejaar 2014-2015

# Inhoudsopgave

# Voorwoord

Beste lezer,

Alvorens onszelf onder te dompelen in de theorie van de schierveelhoeken, had ik graag van dit voorwoord gebruik gemaakt om enkele mensen te bedanken. Als eerste wil ik mijn promotor Bart De Bruyn bedanken voor het aanwakkeren van mijn interesse in dit onderwerp tijdens de lessen Eindige Meetkunde. Ik wil hem ook bedanken voor het aanbieden van dit onderwerp en de nodige bronnen en voor de tijd die hij heeft vrijgemaakt om de vragen waar ik mee zat op te lossen.

Daarnaast wil ik ook de vele mensen bedanken die op geregelde tijdstippen polsten naar de toestand en voortgang van deze thesis, en mij op even geregelde tijdstippen er aan deden denken dat de deadline dichter en dichter kwam. In het bijzonder wil ik ook nog mijn kotgenotes Sien De Groot, Sofie Standaert en mijn nichtje Hannah Van Eenoo bedanken voor het gebruik van hun spellingvaardigheden bij het nalezen van deze thesis, voor de broodnodige koffie- en theepauzes in deze tijden van drukte en voor de Photoshophulp.

Als laatste wil ik ook Annelies Cuvelier, Lien Gillis, Lieve Vandewalle en alle anderen bedanken die samen met mij de wiskundige berg van Wiskundige Analyse 1 tot masterproef beklommen hebben en van de afgelopen vijf jaar een onvergetelijke tijd gemaakt hebben.

# Inleiding

Reguliere schierveelhoeken zijn meetkundige structuren die vanuit verscheidene standpunten benaderd kunnen worden. In deze masterthesis worden ze bekeken vanuit de theorie van de afstandsreguliere grafen, en behandelen we ze vooral op algebraïsche wijze. Er worden ook bestaansvoorwaarden geformuleerd en bewezen voor twee specifieke types reguliere schierveelhoeken, namelijk de veralgemeende veelhoeken en de reguliere schierachthoeken. Ten slotte wordt ook het niet-bestaan bewezen van de schierachthoek met parameters $(s,t,t_2,t_3) = (2,24,0,8)$ en de schierzeshoek met parameters $(s,t,t_2) = (3,9,1)$.

## Inhoud

Om de bestaansvoorwaarden voor veralgemeende vierhoeken en reguliere schierachthoeken te bewijzen, maken we gebruik van de Kreinvoorwaarden toegepast op afstandsreguliere grafen.

In hoofdstuk 1 bekijken we de Kreinvoorwaarden in hun meest algemene vorm. Daarna worden in hoofdstuk 2 enkele algemene resultaten bewezen voor afstandsreguliere grafen. We formuleren en bewijzen ook de Kreinvoorwaarden voor afstandsreguliere grafen.

In hoofdstuk 4 gebruiken we deze Kreinvoorwaarden dan om grenzen te bepalen op de parameters van reguliere schierveelhoeken. We bekijken ook de eigenwaarden van de adjacentiematrix van schierveelhoeken met bepaalde diameters. Als laatste bepalen we ook enkele resultaten die we zullen nodig hebben in hoofdstuk 5.

Daarna formuleren en bewijzen we bestaansvoorwaarden voor reguliere schierachthoeken in hoofdstuk 5. In sectie 4 komen we eindige, reguliere lokaal projectieve ruimtes tegen, en gebruiken we een resultaat dat in hoofdstuk 3 wordt bewezen.

De bestaansvoorwaarden voor veralgemeende veelhoeken formuleren en bewijzen we in hoofdstuk 6. Hiervoor werd ook gebruik gemaakt van de Kreinvoorwaarden uit hoofdstuk 1.

Ten slotte bewijzen we via meetkundige argumenten het niet-bestaan van de schierachthoek met parameters $(s,t,t_2,t_3) = (2,24,0,8)$ in hoofdstuk 7 en de schierzeshoek met parameters $(s,t,t_2) = (3,9,1)$ in hoofdstuk 8.

## Bronnen en eigen inbreng

De inhoud van hoofdstuk 1 is voornamelijk afkomstig uit [1] en p.43-51 van [8]. Deze twee bronnen vermelden grotendeels dezelfde resultaten. De bron [8] werd dan ook gebruikt als aanvulling op [1]. Een bepaald resultaat over de Bose-Mesner algebra werd hierin eerder vluchtig vermeld. Dit resultaat wordt in sectie 2 bewezen aan de hand van Stelling 2.1 op p.224 van [2]. Hoewel de grote lijn van dit bewijs duidelijk was, zijn hier toch verklaringen bijgevoegd voor een paar stappen die minder gemakkelijk te volgen waren.

De inhoud van hoofdstuk 2 is afkomstig uit p.126-133 van [8]. Deze was zeer duidelijk en is hier enkel opgenomen om de ongelijkheden die ontstaan uit de Kreinvoorwaarden later gemakkelijker te kunnen bewijzen. Enkele van de resultaten in deze bron waren echter op het eerste zicht minder duidelijk, en worden hier iets uitvoeriger bewezen in Lemma 2.2 en Lemma 2.3.

De inhoud van hoofdstuk 3 is afkomstig uit [3]. De algemene redeneringen uit dit artikel waren zeer duidelijk. Enkele korte redeneringen uit het artikel worden hier wat uitvoeriger beschreven, zoals bv. in Lemma 3.6 en Lemma 3.9. In het artikel werd het bewijs van Lemma 3.9 als analogon van Lemma 3.10 aan de lezer overgelaten. Hier wordt dit bewijs van dit lemma verder uitgewerkt.

Hoofdstuk 4 volgt de lijn die wordt uiteengezet in p.160-168 van [4] als voorbereiding op hoofdstuk 5. Hier werden de meeste redeneringen en bewijzen zeer beknopt geformuleerd. In deze masterthesis worden ze duidelijker uit de doeken gedaan en worden de berekeningen die in het artikel zijn weggelaten ook uitgevoerd. Na Definitie 4.8 geven we ook een resultaat uit [9] ter vervollediging van de theorie.

Hoofdstuk 5 is voornamelijk gebaseerd op [4]. In deze bron was er echter een fout. Deze werd opgelost in [5] en wordt uit de doeken gedaan in sectie 5. In sectie 2 halen we ook een resultaat uit [9] aan ter afhandeling van een zeer specifiek geval.

De inhoud uit hoofdstuk 6 is afkomstig uit p.200-203 van [8]. De redeneringen die daar gebruikt werden, waren zeer duidelijk. De berekeningen daarentegen werden grotendeels aan de lezer overgelaten. Deze worden hier uitvoerig uitgewerkt. Omdat in de bron ook veel wordt overgesprongen van het ene geval op het andere, worden de resultaten hier ook duidelijker gegroepeerd per geval.

De inhoud van hoofdstuk 7 is afkomstig uit [6]. De redeneringen in dit artikel waren zeer duidelijk. Enkel de inhoud van Lemma 7.5, Lemma 7.8 en de berekening van het beeld van de verschillende punten onder de afbeelding $\theta_{x,C}$ worden niet expliciet vermeld in het artikel.

De inhoud van hoofdstuk 8 is gebaseerd op [7]. De redeneringen uit het artikel zijn hier meer uitgewerkt, zodat de lezer zich minder vragen hoeft te stellen bij de bekomen resultaten.

Enkel Figuur 8.1 en Figuur 8.11 zijn rechtstreeks afkomstig uit [7]. De andere figuren werden specifiek voor deze masterthesis gecreëerd ter verduidelijking van de gevolgde redeneringen.

# Hoofdstuk 1

# De Bose-Mesner algebra

Om in verdere hoofdstukken voorwaarden te kunnen opstellen voor de parameters van schierveelhoeken, hebben we de Kreinvoorwaarden nodig. Deze ongelijkheden vinden hun oorsprong in de Bose-Mesner algebra. In dit hoofdstuk bestuderen we deze algebra en bekijken we de Kreinvoorwaarden in hun meest algemene vorm.

## 1 Definities en basiseigenschappen

De Bose-Mesner algebra wordt gevormd vanuit associatieschema's. We bekijken deze eerst wat naderbij.

**Definitie 1.1.** *Een associatieschema met $d$ klassen is een paar $(X, R)$ met $X$ een eindige set en*

1. $R = \{R_0, R_1, ..., R_d\}$ *een partitie van* $X \times X$,
2. $R_0 = \{(x, x) | x \in X\}$,
3. $(x, y) \in R_i \Rightarrow (y, x) \in R_i$,
4. *en de eigenschap dat er natuurlijke getallen $p^l_{ij}$ zijn zodat voor elk paar $(x, y)$ in $R_l$ er $p^l_{ij}$ mogelijke $z \in X$ zijn met $(x, z) \in R_i$ en $(y, z) \in R_j$.*

Door in de definitie van $p^l_{ij}$ de rollen van $x$ en $y$ om te wisselen, zien we dat $p^l_{ij} = p^l_{ji}$. Als we nu de getallen $k_i := p^0_{ii}$ bekijken, dan is dit voor elke $(x, y) \in R_0$ volgens de definitie gelijk aan het aantal mogelijke $z \in X$ waarvoor geldt dat $(x, z) \in R_i$ en $(y, z) \in R_i$. Omdat $(x, y) \in R_0$, geldt dat $x = y$, dus is $k_i$ gelijk aan het aantal $z \in X$ met $(x, z) \in R_i$. Doordat $R$ een partitie is van $X \times X$ in $d$ klassen, weten we dat

$$v := |X| = \sum_{i=0}^{d} k_i.$$

Voor elke klasse kunnen we nu een vierkante matrix $A_i$ definiëren met rijen en kolommen geïndexeerd door de elementen van $X$:

$$(A_i)_{xy} = \begin{cases} 1 & \text{als } (x, y) \in R_i, \\ 0 & \text{anders.} \end{cases}$$

De definitie van een associatieschema uitgedrukt in de matrices $A_i$ wordt nu

1. $\sum_{i=0}^{d} A_i = J$,
2. $A_0 = I$,
3. $A_i = A_i^T$, dus de matrices $A_i$ zijn symmetrisch en
4. $A_i A_j = \sum_{k=0}^{d} p^k_{ij} A_k$.

De eerste drie eigenschappen zijn hier duidelijk. De vierde vraagt wat meer uitleg. Als we kijken naar het element $(A_iA_j)_{xy}$, dan is dit gelijk aan het aantal elementen $z \in X$ waarvoor zowel $(A_i)_{xz} = 1$ als $(A_j)_{zy} = 1$. Vertaald naar de oorspronkelijke definitie wordt dit dus het aantal elementen $z \in X$ waarvoor $(x, z) \in R_i$ en $(y, z) \in R_j$. Als $(x, y) \in R_k$, dan is dit volgens (1.1) gelijk aan $p^k_{ij}$. We weten ook dat $(x, y)$ in exact één van de $R_i$ zit. Als we de som nemen in het rechterlid, dan zien we dus dat voor $(x, y) \in R_k$ er net $p^k_{ij}$ verschijnt op de positie $xy$. De beide uitdrukkingen zijn dus gelijk.

**Definitie 1.2.** *Voor een matrix $A$ definiëren we $\sum(A)$ als de som van alle elementen van de matrix dus*

$$\sum(A) := \sum_{x,y} A(x, y).$$

We hebben nu ook dat

$$\sum(A_i) := \sum_{x,y\in X} A_i(x, y) = vk_i,$$

aangezien er $v$ elementen $x$ in $X$ zitten, en er voor elke $x$ exact $k_i$ elementen $y$ zijn zodat $A_i(x, y) = 1$.

De matrices $A_i$, $i \in \{0, ..., d\}$ zijn lineair onafhankelijk. Elk element van $X \times X$ behoort immers tot exact één partitieklasse, waardoor elke positie van de matrix ook verschillend is van nul in exact één van de matrices $A_i$, $i \in \{0, ..., d\}$. Ze spannen bijgevolg een $(d + 1)$-dimensionale commutatieve algebra van symmetrische matrices op. Dit wordt ook wel de Bose-Mesner algebra genoemd. Deze algebra is gesloten onder vermenigvuldiging (door de vierde eigenschap) en ook onder elementsgewijze vermenigvuldiging $\circ$, aangezien geldt dat $A_i \circ A_j = \delta_{ij}A_i$. Omdat de matrices $A_i$ commuteren, zijn ze gezamenlijk diagonaliseerbaar. Als er maar $d$ verschillende eigenwaarden (en maar $d$ verschillende eigenruimtes) zouden zijn, zouden we maximum $d$ verschillende, lineair onafhankelijke, gezamenlijk diagonaliseerbare matrices vinden. We vinden bijgevolg $d + 1$ eigenruimtes. Omdat de matrix $J$ in deze algebra zit, en $J$ een eigenwaarde heeft met multipliciteit 1 (namelijk $v$), weten we dat één van deze eigenruimtes ééndimensionaal is.

# 2 Idempotenten

We bewijzen nu dat de Bose-Mesner algebra een orthogonale basis heeft van idempotenten. De leidraad hiervoor is [2]

**Definitie 1.3.** *Een matrix $M$ is idempotent als $M^2 = M$.*

**Definitie 1.4.** *Twee matrices $M$ en $N$ zijn orthogonaal als $MN = 0$.*

We definiëren een orderelatie op de idempotenten van de Bose-Mesner algebra door te stellen dat $E \leq F$ als $FE = E$. Deze is

- reflexief, want $EE = E$,
- antisymmetrisch, want als $E \leq F$ en $F \leq E$, dan is $E = FE = F$,
- en transitief, want als $E \leq F$ en $F \leq G$, dan is $GE = GFE = FE = E$, dus $E \leq G$.

De relatie $\leq$ is dus een partiële orderelatie.

**Definitie 1.5.** *Een minimale idempotent is een minimaal element van de verzameling van niet-nulzijnde idempotenten van de Bose-Mesner algebra ten opzichte van de partiële orderelatie $\leq$.*

Voor een minimale idempotent $E$ en een willekeurige niet-nulzijnde idempotent $F$ geldt dus dat $F \leq E$ enkel en alleen als $F = E$. Doordat voor twee idempotenten $E$ en $F$ ook geldt dat $EFE = EEF = EF$ en $EFF = EF$, weten we dat $EF \leq E$ en $EF \leq F$. Als we dus twee verschillende minimale idempotenten $E$ en $F$ hebben, dan is $EF \leq E$ en $EF \leq F$, waardoor ofwel $E = EF = F$ geldt (strijdig want $E \neq F$), ofwel $EF = 0$ is. Twee verschillende minimale idempotenten zijn dus altijd orthogonaal.

**Lemma 1.6.** *Neem een commutatieve matrixalgebra $\mathscr{B}$ met identiteit over een algebraïsch gesloten veld. We nemen aan dat $N = 0$ als $N^2 = 0$. De algebra $\mathscr{B}$ heeft dan een orthogonale basis van idempotenten.*

**Bewijs.** We bewijzen eerst dat elk element van $\mathscr{B}$ kan geschreven worden als een lineaire combinatie van idempotenten. Neem dus willekeurig $A \in \mathscr{B}$ met $\psi(t)$ het minimaalpolynoom van $A$ en stel $\psi(t) = \prod_{i=1}^{k}(t-\theta_k)^{m_i}$. We definiëren de veelterm $\psi_i(t) := \frac{\psi(t)}{(t-\theta_i)^{m_i}}$ voor $1 \leq i \leq k$. Er is dan geen factor die voorkomt in alle veeltermen $\psi_1, ..., \psi_k$. Deze veeltermen zijn dus copriem. We vinden veeltermen $f_i(t)$, $1 \leq i \leq k$ zodat

$$1 = \sum_{i=1}^{k} f_i(t)\psi_i(t).$$

Hieruit vinden we

$$I = \sum_{i=1}^{k} f_i(A)\psi_i(A). \tag{1.1}$$

Voor $i \neq j$ vinden we dat $\psi$ een deler is van $\psi_i\psi_j$, dus moet $\psi_i(A)\psi_j(A) = 0$ zijn. Als we nu beide leden van (1.1) vermenigvuldigen met $f_j(A)\psi_j(A)$ voor een $j \in \{1, ..., k\}$ vinden we

$$f_j(A)\psi_j(A) = (f_j(A)\psi_j(A))^2$$

wat betekent dat $f_j(A)\psi_j(A)$ een idempotent is. We stellen $E_j := f_j(A)\psi_j(A)$. Doordat $\psi_i(A)\psi_j(A) = 0$ voor $i \neq j$ en $i, j \in \{1, ..., k\}$, vinden we dat $E_iE_j = 0$. Doordat

$$0 = \psi(A) = (A - \theta_i I)^{m_i}\psi_i(A),$$

vinden we ook dat $(A-\theta_i I)^{m_i}E_i = 0$. Vermenigvuldigen we dit $m_i - 1$ keer met $E_i$, dan vinden we $((A-\theta_i I)E_i)^{m_i} = 0$. We mogen aannemen dat uit $N^2 = 0$ volgt dat $N = 0$. Door herhaaldelijk toepassen van deze aanname[1] vinden we hier $(A - \theta_i I)E_i = 0$. De gelijkheid (1.1) kunnen we nu ook schrijven als $I = \sum_{i=1}^{k} E_i$. Hieruit volgt nu

$$A = \sum_{i=0}^{k} AE_i = \sum_{i=0}^{k} \theta_i E_i.$$

We kunnen $A$ dus altijd schrijven als een lineaire combinatie van idempotenten. De algebra $\mathscr{B}$ wordt bijgevolg opgespannen door zijn idempotenten.

Er rest ons nu enkel nog te bewijzen dat er minimale idempotenten bestaan, en dat elke idempotent kan geschreven worden als een lineaire combinatie van minimale idempotenten. Neem daarvoor twee verschillende idempotenten $E$ en $F$ en stel dat $E \leq F$ is. Hiervoor geldt dat $F(I-E) = F - FE = F - E \neq 0$, terwijl $E(I-E) = 0$. Als we echter de ruimtes $C(E) := \{Ex : x \in \mathbb{R}^v\}$ en $C(F)$ bekijken, dan vinden we voor een willekeurige $x \in \mathbb{R}^v$ dat $v := Ex = FEx$. Omdat $x$ hier willekeurig was, moet $C(E)$ een deelverzameling zijn van $C(F)$. Deze ruimtes zijn isomorf met de ruimtes opgespannen door de kolommen van respectievelijk $E$ en $F$, dus hun dimensie is gelijk aan de rang van respectievelijk $E$ en $F$. Als nu $x$ een kolom van $I - E$ is, vinden we $Fx \neq 0$ en $Ex = 0$. Nu zit $Fx$ wel in $C(F)$, maar niet in $C(E)$. Anders zouden we immers voor een bepaalde kolomvector $z$ vinden dat

$$Fx = Ez \Rightarrow EFx = EEz = Ez \Rightarrow FEx = Ez \Rightarrow 0 = Ez \Rightarrow Fx = 0.$$

Dit levert ons een strijdigheid. De ruimte $C(E)$ is nu een echte deelruimte van $C(F)$, dus de rang van $E$ is strikt kleiner dan die van $F$. Als we dus verschillende idempotenten $E_1, E_2, ..., E_m$ hebben met $E_1 \leq E_2 \leq ... \leq E_m$, dan kan $m$ hoogstens gelijk zijn aan $v$. We kunnen dus niet altijd een 'kleinere' idempotente matrix vinden, waaruit we kunnen besluiten dat er wel degelijk minimale idempotente matrices bestaan. We moeten nu enkel nog bewijzen dat elke idempotent een lineaire combinatie is van minimale idempotenten. Neem dus een willekeurige idempotent $F$. Voor elke minimale idempotent $E$ met $EF \neq 0$ vinden we dat $EF \leq E$, dus $EF = E$. We definiëren $F_0$ nu als de som van alle verschillende minimale idempotenten $E$ met $E \leq F$. Als som van idempotente, twee-aan-twee orthogonale matrices is $F_0$ dan zelf ook idempotent. Als $F_0 \neq F$, dan is $F - F_0$ ook idempotent, dus is er een minimale idempotent $E'$ met $E' \leq F - F_0$. Stellen we $E^*$ gelijk aan een willekeurige minimale idempotent met $E^* \leq F$, dan vinden we

$$E'F - E'F_0 = E' \Rightarrow E'FE^* - E'F_0E^* = E'E^* \Rightarrow E'E^* - E'E^* = E'E^* \Rightarrow E'E^* = 0.$$

[1] Voor een even $m$ gebruiken we $N^m = 0 \Rightarrow N^{m/2} = 0$. Voor een oneven $m$ gebruiken we $N^m = 0 \Rightarrow N^{m+1} = 0N = 0 \Rightarrow N^{\frac{m+1}{2}} = 0$.

De tweede stap volgt hier uit het feit dat $E^* \leq F$ en het feit dat minimale idempotenten orthogonaal zijn. Hieruit vinden we dat $E'F_0 = 0$, dus moet $E'F = E'$, waaruit volgt dat $E' \leq F$. Hieruit vinden we nu dat $E'F - E'F_0 = E - E = 0$, strijdig met het feit dat $E'F - E'F_0 = E'$. De enige mogelijkheid is dat $F = F_0$, wat het volledige lemma bewijst. □

We passen het vorige lemma nu toe op de Bose-Mesner algebra

**Stelling 1.7.** *De Bose-Mesner algebra heeft een orthogonale basis van minimale idempotenten* $\{E_j | 0 \leq j \leq d\}$ *met rangen* $f_j := tr(E_j)$.

**Bewijs.** Als we kunnen bewijzen dat voor een matrix $N$ uit de algebra met $N^2 = 0$ geldt dat $N = 0$, dan kunnen we het vorige lemma toepassen en is de stelling bewezen. Neem dus zo een matrix $N$, dan is $0 = (N^*)^2 N^2 = (N^* N)^2$. Dit wil zeggen dat $0 = \mathrm{tr}((N^* N)^2) = \mathrm{tr}((N^* N)^* (N^* N))$. Nu geldt voor alle matrices $M$ dat $\mathrm{tr}(M^* M) = 0$ als en slechts als $M = 0$, dus hieruit vinden we dat $N^* N = 0$, dus dat $\mathrm{tr}(N^* N) = 0$, dus dat $N = 0$. Hierdoor kunnen we nu het vorige lemma toepassen, en is de stelling bewezen. □

# 3 De Kreinvoorwaarden

Uit deze voorwaarden zullen later zware restricties volgen voor de parameters van schierveelhoeken. We bewijzen ze hier aan de hand van [1]. We definiëren matrices $P$ en $Q$ zodat

$$A_j = \sum_{i=0}^{d} P_{ij} E_i, \qquad E_j = \frac{1}{v} \sum_{i=0}^{d} Q_{ij} A_i.$$

Hieruit volgt dat

$$A_j = \sum_{i=0}^{d} P_{ij} \left( \frac{1}{v} \sum_{k=0}^{d} Q_{ki} A_k \right) = \frac{1}{v} \sum_{i,k=0}^{d} P_{ij} Q_{ki} A_k.$$

Nu weten we dus dat $\frac{1}{v} P_{ij} Q_{ki} = \delta_{jk}$, dus $PQ = vI$. Definiëren we nu getallen $q_{ij}^k$ door te stellen dat

$$E_i \circ E_j := \frac{1}{v} \sum_{k=0}^{d} q_{ij}^k E_k,$$

dan bekomen we de volgende stelling

**Stelling 1.8.** *Voor alle* $i, j, k \in 0, ..., d$ *geldt*

$$v f_k q_{ij}^k = \sum_{l=0}^{d} k_l Q_{li} Q_{lj} Q_{lk} \geq 0$$

*met gelijkheid als en slechts dan als*

$$\sum_{x \in X} E_i(u, x) E_j(v, x) E_k(w, x) = 0 \tag{1.2}$$

*voor alle* $u, v, w \in X$.

**Bewijs.** Omdat de matrices $E_i$ idempotent zijn, geldt $(E_i)^2 = E_i$, wat hetzelfde is als

$$E_i(x, y) = \sum_{u \in X} E_i(x, u) E_i(u, y) = \sum_{u \in X} E_i(u, x) E_i(u, y),$$

waarbij de laatste stap volgt uit het symmetrisch zijn van $E_i$. Als we het linkerlid van (1.2) schrijven als $q(u, v, w)$, dan krijgen we

$$\sum (E_i \circ E_j \circ E_k) = \sum_{x,y \in X} E_i(x, y) E_j(x, y) E_k(x, y),$$

$$\begin{aligned}
\sum(E_i \circ E_j \circ E_k) &= \sum_{x,y\in X} \left(\sum_{u\in X} E_i(u,x)E_i(u,y)\right)\left(\sum_{v\in X} E_j(v,x)E_j(v,y)\right)\left(\sum_{w\in X} E_k(w,x)E_k(w,y)\right) \\
&= \sum_{u,v,w\in X} \left(\sum_{x\in X} E_i(u,x)E_j(v,x)E_k(w,x)\right) \times \left(\sum_{y\in X} E_i(u,y)E_j(v,y)E_k(w,y)\right) \\
&= \sum_{u,v,w\in X} q(u,v,w)^2 \geq 0.
\end{aligned}$$

We hebben echter ook dat

$$\begin{aligned}
\mathrm{tr}((E_i \circ E_j)E_k) &= \sum_{x\in X} ((E_i \circ E_j)E_k)(x,x) \\
&= \sum_{x,y\in X} (E_i \circ E_j)(x,y)E_k(y,x) \\
&= \sum_{x,y\in X} E_i(x,y)E_j(x,y)E_k(x,y),
\end{aligned}$$

waarbij de laatste stap volgt uit de definitie van $\circ$ en de symmetrie van $E_k$. Hieruit volgt nu

$$\begin{aligned}
v^2 \sum(E_i \circ E_j \circ E_k) &= v^2 \mathrm{tr}((E_i \circ E_j)E_k) \\
&= v\mathrm{tr}\left(\sum_{l=0}^{d} q_{ij}^l E_l E_k\right) \\
&= v\mathrm{tr}(q_{ij}^k E_k) \\
&= v f_k q_{ij}^k,
\end{aligned}$$

waarbij de tweede stap volgt uit de definitie van $q_{ij}^k$ en de voorlaatste stap volgt uit het feit dat de matrices $E_i$ een orthogonale basis vormen. Anderzijds volgt uit de definitie van $Q_{ij}$ dat

$$\begin{aligned}
v^2 \sum(E_i \circ E_j \circ E_k) &= v^2 \sum_{x,y\in X} E_i(x,y)E_j(x,y)E_k(x,y) \\
&= v^2 \sum_{x,y\in X} \left(\frac{1}{v}\sum_{l=0}^{d} Q_{li}A_l(x,y)\right)\left(\frac{1}{v}\sum_{m=0}^{d} Q_{mj}A_m(x,y)\right)\left(\frac{1}{v}\sum_{n=0}^{d} Q_{nk}A_n(x,y)\right) \\
&= \frac{1}{v}\sum_{l,m,n=0}^{d} Q_{li}Q_{mj}Q_{nk}\left(\sum_{x,y\in X} A_l(x,y)A_m(x,y)A_n(x,y)\right) \\
&= \frac{1}{v}\sum_{l,m,n=0}^{d} Q_{li}Q_{mj}Q_{nk}\left(\sum_{x,y\in X} (A_l \circ A_m \circ A_n)(x,y)\right) \\
&= \frac{1}{v}\sum_{l=0}^{d} Q_{li}Q_{lj}Q_{lk}\left(\sum_{x,y\in X} A_l(x,y)\right) \qquad (A_i \circ A_j = \delta_{ij}A_i) \\
&= \frac{1}{v}\sum_{l=0}^{d} v k_l Q_{li}Q_{lj}Q_{lk} \\
&= \sum_{l=0}^{d} k_l Q_{li}Q_{lj}Q_{lk}
\end{aligned}$$

wat de stelling volledig bewijst. $\square$

# Hoofdstuk 2

# Afstandsreguliere grafen

De collineariteitsgrafen van schierveelhoeken zijn specifieke gevallen van afstandsreguliere grafen. We bekijken daarom eerst de afstandsreguliere grafen van wat naderbij. Deze grafen zijn in het bijzonder ook associatieschema's, waardoor we de Kreinvoorwaarden ook hierop kunnen toepassen. Verder bepalen we hier ook nog een rationaliteitsvoorwaarde die we later dan kunnen toepassen op schierveelhoeken.

## 1 Definitie

**Definitie 2.1.** *Een afstandsreguliere graaf is een samenhangende graaf met parameters $b_i, c_i$ voor $i \geq 0$ zodat voor elke twee punten $x, y$ in de graaf op afstand $d(x,y) = j$ er exact $c_j$ buren van $y$ in $\Gamma_{j-1}(x)$ liggen en $b_j$ buren van $y$ in $\Gamma_{j+1}(x)$.*

Door een paar punten $x, y$ op afstand 0 te bekijken (dus $x = y$), volgt hieruit dat een afstandsreguliere graaf ook regulier is met parameter $k := b_0$. Zo vinden we voor een puntenpaar $x, y$ met $d(x,y) = j$ ook het aantal buren van $y$ in $\Gamma_j$, namelijk $a_j := k - b_j - c_j$. Logischerwijs geldt voor een graaf met diameter $d$ dat $b_d = 0$, $c_0 = 0$ en $c_1 = 1$.

**Lemma 2.2.** *Voor $0 \leq i \leq d$ is $|\Gamma_i(x)| = k_i$ met $k_0 = 1$, $k_1 = k$ en $k_{i+1} = k_i b_i / c_{i+1}$, $0 \leq i \leq d-1$.*

**Bewijs.** We kiezen een vast punt $x$, dan ligt er één punt op afstand 0 van $x$, namelijk $x$ zelf. Er liggen $k$ punten op afstand 1 van $x$. We tellen nu de puntenparen $(y, z)$ met $d(x,y) = i$, $d(x,z) = i+1$ en $d(y,z) = 1$. Tellen we eerst het aantal punten $z$ en daarna de mogelijke punten $y$ dan vinden we $k_{i+1}c_{i+1}$. Tellen we eerst het aantal punten $y$ en daarna het aantal mogelijke punten $z$, dan vinden we $k_i b_i$, wat het lemma bewijst. □

Het totaal aantal punten in de graaf is dus $v = \sum_{i=0}^{d} k_i$. Als we de punten labelen met een getal $i$ met $i \in \{1, ..., v\}$, dan kunnen we net zoals bij associatieschema's vierkante matrices $A_i$ definiëren als volgt:

$$(A_i)_{xy} = \begin{cases} 1 & \text{als } d(x,y) = i, \\ 0 & \text{anders.} \end{cases}$$

We stellen hierbij $A := A_1$. We vinden $A_0 = I$, $J = \sum_{i=0}^{d} A_i$. Voor grafen met een diameter $d$ geldt dat $A_{d+1} = 0$.

**Lemma 2.3.** *Er geldt dat $AA_i = c_{i+1}A_{i+1} + a_i A_i + b_{i-1}A_{i-1}$.*

**Bewijs.** We hebben

$$(AA_i)_{xy} = \sum_{z=1}^{v} A_{xz}(A_i)_{zy}.$$

Nu is $A_{xz}(A_i)_{zy} = 1$ enkel als $d(x,z) = 1$ en $d(z,y) = i$. Als $d(x,y) = i-1$, dan is het aantal mogelijke punten $z$ dat hieraan voldoet gelijk aan $b_{i-1}$. Als $d(x,y) = i$, dan hebben we $a_i$ mogelijke punten $z$. Als $d(x,y) = i+1$, dan hebben we $c_{i+1}$ mogelijke punten $z$. Door de driehoeksongelijkheid zijn dit de enige mogelijkheden. □

Hieruit volgt nu dat we de matrices $A_i$ kunnen schrijven als veeltermen $v_i$ van de matrix $A$ met graad $i$. We definiëren zo $v_i(A) := A_i$. Omdat de matrices lineair onafhankelijk zijn, heeft $A$ minstens $d+1$ verschillende eigenwaarden. Stel immers dat $A$ hoogstens $d$ verschillende eigenwaarden heeft, dan is het minimaalpolynoom van $A$ ook hoogstens van graad $d$, dus dan kunnen we $v_d(A)$ schrijven als een lineaire combinatie van $v_i(A)$, $0 \leq i \leq d-1$. Omdat $v_{d+1}(A) = A_{d+1} = 0$ een veelterm van graad $d+1$ in $A$ is, weten we ook dat er exact $d+1$ verschillende eigenwaarden zijn. Als we nu een eigenwaarde $\theta$ van $A$ hebben, dan volgt uit het voorgaande dat $v_i(\theta)$ een eigenwaarde is van $A_i$. Uit (2.3) halen we nu

$$\theta v_i(\theta) = c_{i+1} v_{i+1}(\theta) + a_i v_i(\theta) + b_{i-1} v_{i-1}(\theta). \tag{2.1}$$

We weten ook dat als $\theta$ geheel is, $v_i(\theta)$ een algebraïsch geheel getal is en als eigenwaarde van een matrix van gehele getallen dus ook een geheel getal. We weten dat $k$ een eigenwaarde is van $A$ horende bij de eigenvector $(1, ..., 1)^T$. De bijbehorende eigenwaarden $v_i(k)$ van de $A_i$ zijn ook eigenwaarden horende bij deze eigenvector, dus zo vinden we $v_i(k) = k_i$. Hieruit volgt de volgende definitie:

$$u_i(\theta) := v_i(\theta)/k_i.$$

Uit Lemma 2.2 en (2.1) vinden we nu

$$\begin{aligned}
\theta u_i(\theta) &= \theta \frac{v_i(\theta)}{k_i} \\
&= c_{i+1} \frac{v_{i+1}(\theta)}{k_i} + a_i \frac{v_i(\theta)}{k_i} + b_{i-1} \frac{v_{i-1}(\theta)}{k_i} \\
&= c_{i+1} \frac{b_i v_{i+1}(\theta)}{k_{i+1} c_{i+1}} + a_i \frac{v_i(\theta)}{k_i} + b_{i-1} \frac{c_i v_{i-1}(\theta)}{k_{i-1} b_{i-1}} \\
&= b_i u_{i+1}(\theta) + a_i u_i(\theta) + c_i u_{i-1}(\theta)
\end{aligned} \tag{2.2}$$

en $u_{-1}(\theta) = 0$, $u_0(\theta) = 1$ en $u_1(\theta) = \theta/k$.

# 2 Eigenmatrices

Om de Kreinvoorwaarden te kunnen formuleren in de terminologie van de afstandsreguliere grafen, bepalen we eerst een orthogonale basis van idempotenten voor de algebra voortgebracht door de matrices $A_i$, $i \in \{0, ..., d\}$.

**Definitie 2.4.** *De $\theta$-eigenruimte van een graaf met adjacentiematrix $A$ is de ruimte van vectoren $x$ waarvoor geldt $Ax = \theta x$. Deze ruimtes zijn niet-triviaal enkel als $\theta$ wel degelijk een eigenwaarde is van $A$. In dat geval bestaat de eigenmatrix gedefiniëerd als*

$$E(\theta) := \sum_{i=0}^{d} u_i(\theta) A_i.$$

**Lemma 2.5.** *Voor elke eigenwaarde $\theta$ van $A$ geldt $AE(\theta) = \theta E(\theta)$.*

**Bewijs.** We passen eerst de definitie van $E(\theta)$ toe en we gebruiken de recursiebetrekking uit Lemma 2.3

$$\begin{aligned}
AE(\theta) &= \sum_{i=0}^{d} u_i(\theta) A A_i \\
&= \sum_{i=0}^{d} u_i(\theta)(c_{i+1} A_{i+1} + a_i A_i + b_{i-1} A_{i-1}) \\
&= \sum_{i=0}^{d} u_i(\theta) c_{i+1} A_{i+1} + \sum_{i=0}^{d} u_i(\theta) a_i A_i + \sum_{i=0}^{d} u_i(\theta) b_{i-1} A_{i-1} \\
&= \sum_{i=1}^{d+1} u_{i-1}(\theta) c_i A_i + \sum_{i=0}^{d} u_i(\theta) a_i A_i + \sum_{i=-1}^{d-1} u_{i+1}(\theta) b_i A_i.
\end{aligned}$$

Omdat $c_0 = b_d = c_{d+1} = b_{-1} = 0$, kunnen we deze sommaties ook als volgt schrijven.

$$\begin{aligned}
AE(\theta) &= \sum_{i=0}^{d} u_{i-1}(\theta)c_iA_i + \sum_{i=0}^{d} u_i(\theta)a_iA_i + \sum_{i=0}^{d} u_{i+1}(\theta)b_iA_i \\
&= \sum_{i=0}^{d} u_{i-1}(\theta)c_iA_i + u_i(\theta)a_iA_i + u_{i+1}(\theta)b_iA_i \\
&= \sum_{i=0}^{d} (u_{i-1}(\theta)c_i + u_i(\theta)a_i + u_{i+1}(\theta)b_i)A_i \\
&= \sum_{i=0}^{d} \theta u_i(\theta)A_i \\
&= \theta E(\theta).
\end{aligned}$$

Dit bewijst het lemma. □

**Lemma 2.6.** *Als $\theta, \theta'$ twee verschillende eigenwaarden van $A$ zijn, dan is $E(\theta)E(\theta') = 0$.*

**Bewijs.** Beide eigenmatrices zijn veeltermen in $A$ en commuteren dus met $A$. Uit het vorige lemma halen we dan

$$\theta E(\theta)E(\theta') = AE(\theta)E(\theta') = E(\theta)AE(\theta') = \theta' E(\theta)E(\theta')$$

waaruit volgt dat $E(\theta)E(\theta') = 0$. □

**Stelling 2.7.** *Voor een eigenwaarde $\theta$ van de adjacentiematrix $A$ van de graaf $Q$ heeft de $\theta$-eigenruimte van deze graaf dimensie*

$$f(\theta) := \frac{v}{\sum_{i=0}^{d} k_i u_i(\theta)^2}.$$

*Ze wordt opgespannen door de kolommen van de matrix $E(\theta)$.*

**Bewijs.** Uit het vorige lemma volgt dat de kolommen van $E(\theta)$ behoren tot de $\theta$-eigenruimte van de graaf. Uit de definitie van $E(\theta)$, $v_i$ en $u_i$ volgt de volgende gelijkheid, waaruit we een veelterm $\phi$ kunnen definiëren:

$$E(\theta) = \sum_{i=0}^{d} \frac{v_i(\theta)v_i(A)}{k_i} =: \phi(A).$$

Het vorige lemma zegt nu dat $(x - \theta)\phi(x)$ een veelvoud is van het minimaalpolynoom van $A$. Hieruit volgt dat $(\theta' - \theta)\phi(\theta') = 0$ voor alle eigenwaarden $\theta'$ van $A$, dus $\phi(\theta') = 0$ voor alle eigenwaarden $\theta' \neq \theta$. Omdat $E(\theta)$ een veelterm is in $A$, kunnen we de eigenwaarden van $E(\theta)$ schrijven als veeltermen van de eigenwaarden van $A$. Uit het voorgaande blijkt dat deze eigenwaarden van $E(\theta)$ ofwel nul zijn (als ze ontstaan uit eigenwaarden $\theta' \neq \theta$) ofwel gelijk zijn aan $\phi(\theta)$ (als ze ontstaan uit de eigenwaarde $\theta$). De multipliciteit van $\phi(\theta)$ als eigenwaarde van $E(\theta)$ is gelijk aan de multipliciteit van $\theta$ als eigenwaarde van $A$ en is dus gelijk aan de dimensie $f(\theta)$ van de eigenruimte. Uit de gelijkheid $AE(\theta) = \theta E(\theta)$ volgt dat de kolommen van $E(\theta)$ net de $\theta$-eigenruimte opspannen. We berekenen $\mathrm{tr}(E(\theta))$ op twee manieren. Enerzijds is dit gelijk aan de som van de eigenwaarden van $E(\theta)$, dus gelijk aan $f(\theta)\phi(\theta)$. Anderzijds volgt uit de definitie van $E(\theta)$ dat

$$\mathrm{tr}(E(\theta)) = \mathrm{tr}(\sum_{i=0}^{d} u_i(\theta)A_i) = \sum_{i=0}^{d} u_i(\theta)\mathrm{tr}(A_i) = u_0(\theta)\mathrm{tr}(A_0) = u_0(\theta)v = v.$$

Hieruit volgt nu dat

$$f(\theta) = \frac{v}{\phi(\theta)} = \frac{v}{\sum_{i=0}^{d} \frac{v_i(\theta)v_i(\theta)}{k_i}} = \frac{v}{\sum_{i=0}^{d} \frac{v_i(\theta)^2}{k_i}} = \frac{v}{\sum_{i=0}^{d} k_i u_i(\theta)^2}. \tag{2.3}$$

□

Hieruit halen we onder andere dat de getallen $f(\theta_i)$ de multipliciteiten zijn van de eigenwaarden $\theta_i$ van $A$. We weten ook dat

$$\begin{aligned}
E(\theta)^2 &= \phi(A)E(\theta) && \text{(definitie } \phi\text{)} \\
&= \phi(\theta)E(\theta) && (AE(\theta) = \theta E(\theta)) \\
&= \frac{v}{f(\theta)}E(\theta). && \text{(door middel van (2.3))}
\end{aligned}$$

Zo vinden we $d+1$ verschillende idempotente matrices $E_i := \frac{f(\theta_i)}{v}E(\theta_i)$ die een basis vormen voor de algebra opgespannen door de matrix $A$.

We willen nu de theorie van de Kreinvoorwaarden op de afstandsreguliere grafen kunnen toepassen. In Stelling 1.8 gebruikten we hiervoor een basis van minimale idempotenten van de Bose-Mesner algebra. In het bewijs van deze stelling gebruikten we echter niet rechtstreeks de minimaliteit van de idempotente matrices, maar enkel hun orthogonaliteit. De basis $E_i$, $i \in \{0, ..., d\}$ volstaat hier dus. We zoeken eerst de overgangsmatrix $Q$ zodat $E_j = \frac{1}{v}\sum_{i=0}^{d} Q_{ij}A_i$. We hebben

$$\begin{aligned}
E(\theta_j) &= \sum_{i=0}^{d} u_i(\theta_j)A_i \\
\frac{f(\theta_j)}{v}E(\theta_j) &= \frac{f(\theta_j)}{v}\sum_{i=0}^{d} u_i(\theta_j)A_i \\
E_j &= \frac{1}{v}\sum_{i=0}^{d} f(\theta_j)u_i(\theta_j)A_i.
\end{aligned}$$

Zo bekomen we de gelijkheid $Q_{ij} = f(\theta_j)u_i(\theta_j)$.

**Stelling 2.8.** *Voor $i, j, h \in \{0, ..., d\}$ geldt*

$$0 \le q_{ijh} := \sum_{l=0}^{d} k_l u_l(\theta_i)u_l(\theta_j)u_l(\theta_h)$$

*waarbij de eigenwaarden $\theta$ van groot naar klein geordend worden.*

**Bewijs.** In Stelling 1.8 zagen we

$$\sum_{l=0}^{d} k_l Q_{li}Q_{lj}Q_{lk} \ge 0.$$

Vullen we nu de gevonden waarden $Q_{ij}$ in, dan vinden we

$$\begin{aligned}
\sum_{l=0}^{d} k_l Q_{li}Q_{lj}Q_{lk} &= \sum_{l=0}^{d} k_l f(\theta_i)f(\theta_j)f(\theta_k)u_l(\theta_i)u_l(\theta_j)u_l(\theta_k) \\
&= f(\theta_i)f(\theta_j)f(\theta_k)\sum_{l=0}^{d} k_l u_l(\theta_i)u_l(\theta_j)u_l(\theta_k).
\end{aligned}$$

Nu is $f(\theta_i)f(\theta_j)f(\theta_k)$ een product van 3 multipliciteiten, dus een product van 3 positieve getallen. We bekomen dat $\sum_{l=0}^{d} k_l u_l(\theta_i)u_l(\theta_j)u_l(\theta_k) \ge 0$. $\square$

# Hoofdstuk 3

# Eindige, reguliere, lokaal projectieve ruimtes

Bij het bepalen van de bestaansvoorwaarden van reguliere schierachthoeken, komen we eindige, reguliere, lokaal projectieve ruimtes tegen als specifiek geval van reguliere schierachthoeken. Om te bewijzen dat de te controleren bestaansvoorwaarden ook in dit speciefieke geval gelden, bekijken we deze daarom eerst wat van naderbij.

## 1 Definities

We overlopen eerst enkele meetkundige structuren om zo een beter beeld te vormen van eindige, reguliere, lokaal projectieve ruimtes.

**Definitie 3.1.** *Een lineaire ruimte $E$ is een verzameling $P$ elementen die we punten noemen, met een familie $L$ van deelverzamelingen van $P$ die we rechten noemen, zodanig dat twee verschillende punten in exact één rechte liggen, en elke rechte minstens twee punten bevat.*

**Definitie 3.2.** *Een lineaire variëteit is een deelverzameling $V$ van een lineaire ruimte $E$ zodanig dat elke rechte van $E$ die twee punten bevat van $V$ volledig in $V$ ligt.*

**Definitie 3.3.** *Een vlag is een rij van lineaire variëteiten, waarbij elke variëteit behalve de eerste een echte deelverzameling is van zijn voorganger. Een vlag is maximaal als ze niet bevat is in een andere vlag.*

**Definitie 3.4.** *Een lineaire ruimte $E$ met een verzameling lineaire variëteiten van $E$ is lokaal projectief als voor een punt $p$ van $E$ de structuur geïnduceerd door de lineaire variëteiten door de rechten door $p$ isomorf is met de structuur van een projectieve ruimte van een bepaalde eindige dimensie.*

**Definitie 3.5.** *Een lineaire ruimte is $d$-dimensionaal als er voor elk geheel getal $j \leq d$ een verzameling lineaire variëteiten genaamd $j$-ruimten (of $V_j$'s) bestaat, zodat een 0-ruimte een punt is, een 1-ruimte een rechte is, $V_d = E$ en voor een gegeven $V_j$ en een punt $p \notin V_j$ er een unieke $V_{j+1}$ bestaat met $p \in V_{j+1}$ en $V_j \subset V_{j+1}$.*

Een 2-ruimte noemen we ook soms een vlak.

**Lemma 3.6.** *Elke lokaal projectieve ruimte $E$ is $d$-dimensionaal voor een bepaalde $d \in \mathbb{N}$.*

**Bewijs.** Stel dat $V$ een bepaalde lineaire variëteit is in $E$ en dat $p$ een punt in $V$ is. Doordat $E$ lokaal projectief is, kunnen we de rechten door $p$ zien als punten van een projectieve ruimte, en $V$ als een deelruimte van deze projectieve ruimte bepaald door de rechten door $p$. In de projectieve ruimte heeft $V$ dan een bepaalde dimensie $j-1$. We stellen de dimensie van $V$ in $E$ dan gelijk aan $j$. Deze keuze hangt niet af van het gekozen punt $p$. Om dit in te zien, kiezen we een ander punt $p'$ in $V$ en construeren we twee maximale vlaggen op de rechte $pp'$ die $V$ bevat, namelijk één die $p$ als kleinste variëteit bevat en één die $p'$ als kleinste variëteit bevat. Deze vlaggen induceren dan vlaggen in de projectieve ruimte, die beide maximaal zijn. In de projectieve ruimte zullen de twee vlaggen dezelfde lengte hebben, dus zal $V$ in beide gevallen dezelfde dimensie krijgen.

Als we nu een variëteit $V$ en een punt $p \notin V$ nemen, dan kunnen we een punt $p' \in V$ nemen en de projectieve ruimte in $p'$ bekijken. In deze projectieve ruimte vinden we een punt overeenkomend met de rechte $pp'$ en een variëteit met dimensie $j-1$ overeenkomend met $V$, waarbij het punt corresponderend met $pp'$ niet in deze variëteit ligt. We kunnen bijgevolg in de projectieve ruimte een variëteit $V'$ construeren van dimensie $j$ die zowel het punt corresponderend met $pp'$ als de variëteit corresponderend met $V$ bevat. Met de nieuwe variëteit $V'$ in de projectieve ruimte komt dan een variëteit in $E$ overeen die $V$ bevat en die de rechte $pp'$ bevat, en bijgevolg ook het punt $p$. Op deze manier vinden we op een bepaald moment een variëteit die alle rechten door $p$ bevat. Deze variëteit kan enkel gelijk zijn aan $E$. Als we variëteiten met dimensie $j$ in $E$ zien als $j$-ruimtes, dan zien we dat $E$ wel degelijk $d$-dimensionaal is voor een bepaalde $d$. $\square$

**Definitie 3.7.** *Een lineaire ruimte is regulier als alle rechten evenveel punten bevatten.*

**Definitie 3.8.** *Een Lobachevsky ruimte is een $d$-dimensionale lineaire ruimte voor een bepaalde $d \in \mathbb{N}$ met de eigenschap dat voor elke rechte $l$ en elk punt $p \notin l$ er strikt meer dan één rechte door $p$ in het vlak voortgebracht door $p$ en $l$ ligt die geen punten gemeenschappelijk heeft met $l$. Dit aantal rechten is ook onafhankelijk van het punt $p$ en de rechte $l$ en we noemen dit aantal ook het type van de Lobachevsky ruimte.*

Voor het gemak voeren we de volgende notaties in:

- $v =$ het aantal punten in de ruimte $E$,
- $k =$ het aantal punten op een rechte,
- $d =$ de dimensie van $E$,
- $s_2 =$ het aantal punten in een vlak,
- $s_3 =$ het aantal punten in een 3-ruimte,
- $q =$ de orde van een projectieve ruimte door een punt (dit betekent dat in de projectieve ruimte er $q+1$ punten op een rechte liggen),
- $m =$ het type van een Lobachevsky ruimte.

# 2 Ruimtes met dimensie $d > 3$

We zullen bewijzen dat een eindige, reguliere, lokaal projectieve ruimte van dimensie $d > 3$ altijd een affiene ruimte of een projectieve ruimte is.

**Lemma 3.9.** *Als $v$, $k$ en $d$ gegeven zijn, dan zijn $q$, $s_2$, $s_3$ en $m$ uniek bepaald.*

**Bewijs.** We tellen eerst het aantal rechten door een punt. Enerzijds weten we dat door elke twee punten exact één rechte gaat, en dat op een rechte $k$ punten liggen. Zo bekomen we door een vast punt $\frac{v-1}{k-1}$ rechten. Anderzijds is het aantal rechten door een punt ook gelijk aan het aantal punten van de projectieve ruimte in dat punt. Zo bekomen we $\frac{q^d-1}{q-1}$ rechten. Uit de gelijkheid $\frac{v-1}{k-1} = \frac{q^d-1}{q-1}$ kunnen we $q$ bepalen.

Neem nu een vlak $V_2$ en een punt $p \in V_2$. Dan is $V_2$ in de projectieve ruimte door $p$ een rechte, en bevat deze $q+1$ punten. Dit betekent dat er $q+1$ rechten door $p$ gaan die in $V_2$ liggen. Elk van deze rechten bevat $k-1$ punten verschillend van $p$. We bekomen $s_2 = (q+1)(k-1)+1$.

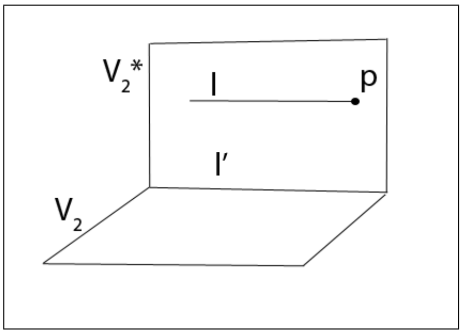
Nemen we een 3-ruimte $V_3$ en een punt $p$ in $V_3$, dan komt $V_3$ overeen met een vlak in de projectieve ruimte door $p$. Zo vinden we $q^2+q+1$ rechten door $p$ in $V_3$. Analoog aan de berekening van $s_2$ vinden we zo $s_3 = (q^2+q+1)(k-1)+1$.

Om nu $m$ te berekenen bekijken we een vlak $V_2$, een punt $p \in V_2$ en een rechte $l \subset V_2$ met $p \notin l$. We weten dat er $q+1$ rechten door $p$ gaan die in $V_2$ liggen, en dat er $k$ rechten door $p$ gaan die een punt gemeenschappelijk hebben met $l$. We kunnen namelijk voor elk punt $p' \in l$ de unieke rechte $pp'$ bekijken. Dit zijn de enige rechten door $p$ die een punt gemeenschappelijk hebben met $l$. We vinden zo $m = q+1-k$. $\square$

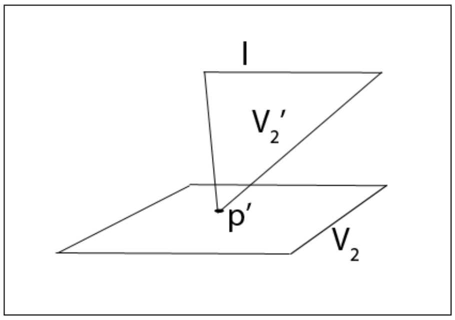
Als $m = 0$, dan is $k = q+1$. Dit betekent dat $E$ een projectieve ruimte is met orde $q$. We gaan verder met de aanname dat $m \geq 1$

**Lemma 3.10.** *Als $d > 2$, dan is $k$ een deler van $s_2$ en bijgevolg ook van $q$.*

**Bewijs.** Neem een vlak $V_2$ en een punt $p \notin V_2$. Dan bepalen $V_2$ en $p$ een 3-ruimte $V_3$. We kunnen nu een rechte $l'$ nemen in $V_2$ en het vlak $V_2^*$ bekijken voortgebracht door $p$ en $l'$. Dit vlak snijdt $V_2$ enkel in $l'$. Doordat $m \geq 1$, weten we dat er een rechte $l$ door $p$ gaat in $V_2^*$ die geen punten gemeenschappelijk heeft met $l'$, dus ook niet met $V_2$. Ter verduidelijking verwijs ik hier naar Figuur 3.1.




Figuur 3.1: Verduidelijking bij Lemma 3.10

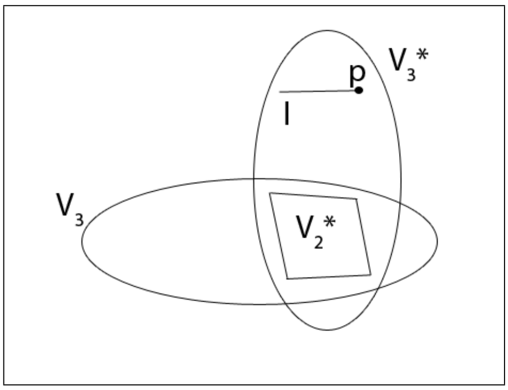



Figuur 3.2: Verduidelijking bij Lemma 3.10

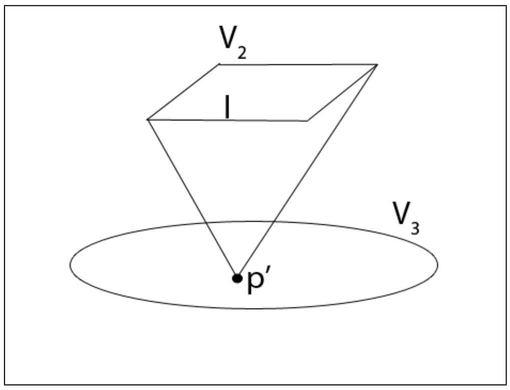
Een willekeurig vlak $V_2'$ door $l$ dat een punt $p'$ van $V_2$ bevat (zie Figuur 3.2), moet $V_2$ snijden in een rechte. Zowel $V_2$ als $V_2'$ liggen immers in $V_3$, en aangezien de ruimte lokaal projectief is, kunnen we de projectieve ruimte vanuit $p'$ bekijken. Daarin is $V_3$ een vlak, $V_2$ een rechte in dat vlak, en $V_2'$ ook een rechte in dat vlak. Twee verschillende rechten die in een projectief vlak liggen snijden altijd in een punt, dus $V_2$ en $V_2'$ snijden in een rechte door $p'$. Als we een ander punt op deze rechte hadden gekozen, dan hadden we hetzelfde vlak $V_2'$ bekomen. Aan de hand van de vlakken door $l$ bekomen we dus een partitie van de punten van $V_2$ in rechten. Het aantal punten $k$ op een rechte moet dus een deler zijn van het aantal punten $s_2$ in $V_2$. Omdat $s_2 = (q+1)(k-1)+1 = qk+k-q$, betekent de voorwaarde $k|s_2$ hetzelfde als $k|q$. □

We definiëren nu een parameter $i$ door te stellen dat $q = (i+1)k$. Hiermee wordt

$$
\begin{aligned}
m &= q + 1 - k = 1 + ik,\\
s_2 &= (q+1)(k-1)+1 = ((i+1)k+1)(k-1)+1 = k((i+1)k-i),\\
s_3 &= (q^2+q+1)(k-1)+1 = (i+1)^2k^3 + (i+1)k^2 + k - (i+1)^2k^2 - (i+1)k\\
&= k((i+1)((i+1)k^2+k-(i+1)k)-i) = k(k(i+1)((i+1)k-i)-i) = k((i+1)s_2 - i).
\end{aligned}
$$




Figuur 3.3: Verduidelijking bij Lemma 3.11




Figuur 3.4: Verduidelijking bij Lemma 3.11

**Lemma 3.11.** *Als $d > 3$, dan is $s_2$ een deler van $s_3$.*

**Bewijs.** Als we een 3-ruimte $V_3$ nemen en een punt $p \notin V_3$, dan brengen $p$ en $V_3$ een 4-ruimte $V_4$ voort. Nemen we een vlak $V_2^*$ in $V_3$, dan brengen het punt $p$ en het vlak $V_2^*$ een 3-ruimte $V_3^*$ voort die enkel het vlak $V_2^*$ gemeenschappelijk heeft met $V_3$. We kunnen net zoals in het vorige bewijs een rechte $l$ door $p$ vinden in $V_3^*$ die geen punten gemeenschappelijk heeft met $V_2^*$ (zie Figuur 3.3). In $V_3^*$ vinden we $q + 1$ vlakken door $l$. We kunnen immers in de projectieve ruimte door $p$ alle rechten door het punt corresponderend met $l$ bekijken. Anderzijds vonden we in het vorig bewijs dat in $V_3^*$ er $\frac{s_2}{k}$ vlakken door $l$ gaan die $V_2^*$ snijden. Doordat $\frac{s_2}{k} = \frac{qk+k-q}{k} = q + 1 - \frac{q}{k} < q + 1$, vinden we in $V_3^*$ een vlak $V_2$ door $l$ dat geen punten gemeenschappelijk heeft met $V_2^*$ en bijgevolg ook niet met $V_3$. Net als in het vorige bewijs vinden we per punt $p'$ van $V_3$ een 3-ruimte $V_3'$ die $V_2$ bevat, en die $V_3$ moet snijden in een vlak (zie Figuur 3.4). Als we een ander punt van dit vlak hadden gekozen, zouden we dezelfde 3-ruimte $V_3'$ bekomen zijn. Zo vinden we een partitie van de punten van $V_3$ in vlakken, dus moet $s_2 | s_3$. □

**Lemma 3.12.** *Als $d > 3$, dan is $m = 1$.*

**Bewijs.** Door het vorige lemma is $s_2$ een deler van $s_3$, wat dankzij de definitie van $i$ wil zeggen dat $s_2$ ook een deler is van $ik$, dus

$$k((i + 1)k - i)|ik \Rightarrow (i + 1)k - i|i.$$

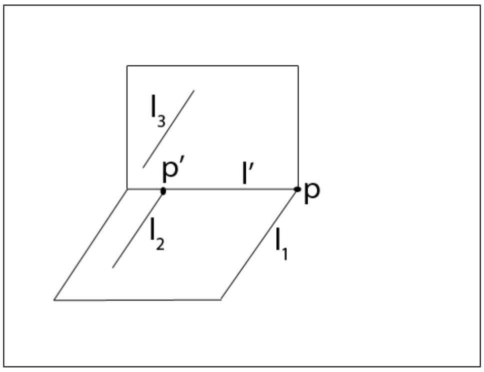
Omdat we $k$ ook kunnen schrijven als $(i + 1)k - i - i(k - 1)$, zien we dat $(i + 1)k - i$ ook een deler is van $k$. Omdat zowel $(i + 1)k - i$ als $k$ positieve gehele getallen zijn, moet $(i + 1)k - i \leq k$, dus $ik \leq i$. Doordat $k > 1$, kan dit enkel als $i = 0$, dus als $m = 1$. □

**Definitie 3.13.** *Twee rechten $l$ en $l'$ zijn parallel als ze in hetzelfde vlak liggen en geen punt gemeenschappelijk hebben, of als $l = l'$. We schrijven voor twee parallelle rechten $l$ en $l'$ ook dat $l \| l'$.*

**Lemma 3.14.** *De relatie $\|$ is een equivalentierelatie.*

**Bewijs.** Uit de definitie volgt direct dat de relatie $\|$ reflexief en symmetrisch is. We moeten enkel nog bewijzen dat ze transitief is. Hiervoor nemen we drie rechten $l_1$, $l_2$ en $l_3$ met $l_1 \| l_2$ en $l_2 \| l_3$. Als deze drie rechten in hetzelfde vlak liggen en $l_2$ is niet gelijk aan één van de rechten $l_1$ en $l_3$ (indien dit wel het geval is, dan is de transitiviteit triviaal), dan kunnen $l_1$ en $l_3$ geen punten gemeenschappelijk hebben tenzij $l_1 = l_3$. Anders zouden door het punt $l_1 \bigcap l_3$ immers twee rechten gaan die geen punten gemeenschappelijk hebben met $l_2$. Dit is strijdig met $m = 1$.

Als de drie rechten $l_1$, $l_2$ en $l_3$ nu niet in hetzelfde vlak liggen, dan kunnen we het vlak voortgebracht door $l_3$ en een punt $p$ van $l_1$ snijden met het vlak waarin $l_1$ en $l_2$ liggen (zie Figuur 3.5). Doordat de ruimte lokaal projectief is, moeten deze twee vlakken snijden in een rechte $l'$. De rechte $l'$ bevat sowieso het punt $p$. Dit kan enkel als $l' \neq l_2$. Als $l'$ en $l_2$ zouden snijden in het punt $p'$, dan vinden we dat $(l_3, l') = (l_3, p') = (l_3, l_2) = (l_2, l') = (l_2, p) = (l_2, l_1)$. Dit kan niet want $l_1$ ligt niet in het vlak $(l_2, l_3)$. De rechte $l_2$ bevat bijgevolg geen enkel punt van de rechte $l'$. Door $m = 1$ en het feit dat $l'$, $l_1$ en $l_2$ coplanair zijn, moet dus $l' = l_1$. Dit betekent dat $l_1$ en $l_3$ coplanair zijn. Dit bewijst de transitiviteit van $\|$, dus ook het volledige lemma. □




Figuur 3.5: Verduidelijking bij Lemma 3.14

Opdat de eindige, reguliere, lokaal projectieve ruimte nu een affiene ruimte zou zijn, moet nog gelden dat

- er door twee verschillende punten een unieke rechte gaat (dit volgt uit de definitie van een lineaire ruimte),
- er drie niet-collineaire punten bestaan (dit is gemakkelijk te vinden door $s_2 > k$),
- en voor gegeven een punt $p$ en een rechte $l$ niet door $p$ er exact één rechte door $p$ gaat die parallel is aan $l$ (dit volgt uit $m = 1$).

Dit bewijst dat een eindige, reguliere, lokaal projectieve ruimte van dimensie $d > 3$ altijd een affiene of een projectieve ruimte is.

# 3 Het geval $d = 3$

We zullen bewijzen dat een eindige, reguliere, lokaal projectieve ruimte van dimensie 3 een projectieve ruimte, een affiene ruimte of een Lobachevsky ruimte is van type $k^2 - k + 1$ of $k^3 + 1$.

In dit geval is uiteraard $s_3 = v$. Het aantal vlakken door een punt is gelijk aan het aantal rechten in de projectieve ruimte bekeken door een bepaald punt $p$, en is dus gelijk aan het aantal rechten in een projectief vlak. Dit aantal is $q^2+q+1$. Zo vinden we in totaal $\frac{v(q^2+q+1)}{s_2}$ vlakken. Dit geeft als voorwaarde dat $s_2$ een deler moet zijn van $v(q^2+q+1)$. Hier is echter $v = s_3 = (q^2+q+1)(k-1)+1 = q^2(k-1)+s_2$, waarbij de tweede en derde gelijkheden volgen uit het bewijs van Lemma 3.9. Dit resulteert in een nieuwe deelbaarheidsvoorwaarde $s_2|q^2(q^2 + q + 1)(k - 1)$. In het bewijs van Lemma 3.9 vonden we ook dat $s_2 = (q+1)(k-1)+1$, dus zijn $s_2$ en $k-1$ copriem. Bijgevolg moet $s_2$ een deler zijn van $q^2(q^2+q+1)$. De gelijkheid $s_2 = (q + 1)(k - 1) + 1$ kunnen we ook schrijven als $q = \frac{s_2-k}{k-1}$, wat wil zeggen dat $q$ een deler is van $s_2 - k$. We verkrijgen

$$\begin{aligned} s_2|q^2(q^2+q+1) &= \frac{(s_2-k)^2}{(k-1)^2}\left(\frac{(s_2-k)^2}{(k-1)^2} + \frac{s_2-k}{k-1} + 1\right) \\ &= \frac{(s_2-k)^2((s_2-k)^2 + (k-1)(s_2-k) + (k-1)^2)}{(k-1)^4}, \\ s_2|(s_2-k)^2&((s_2-k)^2 + (k-1)(s_2-k) + (k-1)^2), \\ s_2|k^2(k^2&-k(k-1)+(k-1)^2) = k^2(k^2-k+1). \end{aligned}$$

In de bespreking van het geval $d > 3$ vonden we dat voor $d > 2$ en $m \neq 0$ geldt dat $k|q$, waaruit we een parameter $i$ gedefinieerd hadden. Aangezien ook in dit geval $d > 2$ is, kunnen we nog steeds deze definitie van $i$ gebruiken. Het geval $m = 0$ komt net zoals in het vorige geval overeen met een projectieve ruimte. We mogen dus aannemen dat $m \geq 1$. Hiermee verkrijgen we dan

$$s_2|k^2(k^2-k+1) \Rightarrow k((i+1)k-i)|k^2(k^2-k+1) \Rightarrow (i+1)k-i|k(k^2-k+1).$$

**Lemma 3.15.** *Een $i \in \mathbb{N}$ die voldoet aan $(i+1)k-i|k(k^2-k+1)$ moet in de verzameling $\{0, k-1, k^2\}$ liggen.*

**Bewijs.** Stel $x := i + 1$, dan wordt de voorwaarde in het lemma dat $x(k - 1) + 1$ een deler is van $k^2 - k + 1 = (k^2 + 1)(k - 1) + 1$. Er bestaat dus een $R$ zodat

$$(x(k-1)+1)R = (k^2+1)(k-1)+1.$$

Voor zo een $R$ geldt dat $k - 1|R - 1$. Inderdaad, We hebben

$$R - 1 = \frac{(k^2+1)(k-1)+1}{(x(k-1)+1)} - 1 = \frac{(k^2+1-x)(k-1)}{(x(k-1)+1)}.$$

Omdat $k-1$ en $x(k-1)+1$ copriem zijn, moet $k^2+1-x$ deelbaar zijn door $x(k-1)+1$. De uitdrukking $\frac{R}{k-1}$ is dus een positief geheel getal $y$, waardoor $R = y(k-1)+1$. We verkrijgen

$$(x(k-1)+1)(y(k-1)+1) = (k^2+1)(k-1)+1 = k(k(k-1)+1). \tag{3.1}$$

Voor $y = 0$ krijgen we $x = k^2 + 1$. Dit komt overeen met $i = k^2$. Als we deze oplossing uitsluiten, bekomen we $1 \leq x < k^2 + 1$ als grenzen[1] voor $x$. Voor $x = 1$ bekomen we $y = k$, dus resulteren de grenzen op $x$ in de voorwaarde $k \geq y > 0$. Omdat $y \geq 1$, weten we ook dat $x \leq k$. We kunnen (3.1) nu ook schrijven als

$$\begin{aligned}(x(k-1)+1)(y(k-1)+1) &= (k^2+1)(k-1)+1,\\ xy(k-1)^2 + x(k-1) + y(k-1) + 1 &= (k^2+1)(k-1)+1,\\ xy(k-1) + x + y &= k^2 + 1 = (k+1)(k-1)+2.\end{aligned}$$

Modulo $k-1$ wordt deze vergelijking $x+y = 2$. Omdat zowel $x \leq k$ als $y \leq k$, is $x+y \leq 2k$. We bekijken alle mogelijkheden:

$$\begin{aligned} x+y=2 &\quad\rightarrow\quad & xy(k-1)+2 = (k+1)(k-1)+2 \rightarrow xy = k+1,\\ x+y=k+1 &\quad\rightarrow\quad & xy(k-1)+k+1 = (k+1)(k-1)+2 \rightarrow xy = k,\\ x+y=2k &\quad\rightarrow\quad & xy(k-1)+2k = (k+1)(k-1)+2 \rightarrow xy = k-1.\end{aligned}$$

Het eerste geval kan enkel voorkomen als $x = y = 1$, waaruit volgt dat $k = 0$, strijdig met de definitie van $k$. Het laatste geval kan enkel voorkomen als $x = y = k$, waaruit volgt dat $k^2 = k - 1$, wat geen oplossingen heeft voor $k$. We houden dus enkel het tweede geval over. Dit levert oplossingen $x = 1$ en $x = k$, wat overeenkomt met $i = 0$ en $i = k - 1$. □

Voor $i = 0$ bekomen we $m = 1$. In de bespreking van het geval $d > 3$ vonden we al dat dit overeenkomt met een affiene ruimte. Voor $i = k - 1$ krijgen we $m = 1 + ik = 1 + k^2 - k$. Voor $i = k^2$ krijgen we $m = k^3 + 1$. We hebben dus bewezen dat een eindige, reguliere, lokaal projectieve ruimte van dimensie 3 altijd gelijk is aan een affiene ruimte, een projectieve ruimte of een Lobachevsky ruimte van type $k^2-k+1$ of type $k^3 + 1$.

[1]Het getal $x = i + 1$ was gedefiniëerd door $q = (i + 1)k$. Omdat $q$ en $k$ per definitie natuurlijke getallen verschillend van 0 zijn, moet $x = i + 1 > 0$.

# Hoofdstuk 4

# Parametervoorwaarden voor schierveelhoeken

Om later bestaansvoorwaarden voor reguliere schierachthoeken te bewijzen, bepalen we eerst enkele voorwaarden op de parameters van schierveelhoeken.

## 1 Definities en basiseigenschappen

We geven eerst enkele concrete definities.

**Definitie 4.1.** *Een schierveelhoek met diameter $d$ is een samenhangende partiële lineaire ruimte $(X, L)$ zodanig dat voor elk punt $p \in X$ en elke rechte $l \in L$ met $d(x, l) < d$ er een uniek punt op $l$ ligt dat het dichtst bij $p$ ligt.*

Als er een punt bestaat op afstand $d$ van rechte, dan noemen we dit ook een schier-$(2d+1)$-hoek. Als dit niet het geval is, dan spreken we over een schier-$2d$-hoek.

**Definitie 4.2.** *Een reguliere schierveelhoek met diameter $d$ heeft parameters $(s, t_2, ..., t_d)$ zodanig dat elke rechte $s+1$ punten bevat en voor een paar punten $x, y$ met $d(x, y) = i$ geldt dat $y$ adjacent is aan $t_i + 1$ punten op afstand $i-1$ van $x$. Het aantal rechten door een punt is ook constant en stellen we gelijk aan $t$.*

Er geldt dat $t_0 = -1$, aangezien er geen punt op afstand $-1$ van een gegeven punt kan liggen. Er geldt ook dat $t_1 = 0$, aangezien er maar één punt op afstand 0 van een gegeven punt kan liggen, namelijk dit punt zelf. Als we twee punten $x, y$ op afstand $d$ van elkaar nemen in een schier-$2d$-hoek, dan moet elke rechte door $y$ een punt bevatten op afstand $d-1$ van $x$, dus moet in dit geval $t_d = t$.

**Definitie 4.3.** *Een deelverzameling $Y \subset X$ is geodetisch gesloten als voor elk paar punten $x, y$ in $Y$ alle kortste paden tussen $x$ en $y$ ook in $Y$ bevat zijn.*

Een geodetisch gesloten schierveelhoek met diameter 2 noemen we een quad. Een geodetisch gesloten schierveelhoek met diameter 3 noemen we een hex. Stelling 2.3 uit [9] zegt ons dat in een reguliere schierveelhoek met $s \geq 2$ en $t_2 \geq 2$ de kortste paden tussen twee punten $x$ en $y$ met $d(x, y) = i$ een uniek geodetisch gesloten schier-$2i$-hoek voortbrengt. Op twee snijdende rechten vinden we ook een puntenpaar $(x, y)$ op afstand 2 van elkaar. Twee snijdende rechten brengen bijgevolg een quad voort.

De collineariteitsgraaf van een reguliere schierveelhoek is een afstandsreguliere graaf. Als we immers twee punten $x$ en $y$ in de schierveelhoek nemen op afstand $i$ van elkaar, dan zijn er $t_i + 1$ rechten door $x$ die elk één punt bevatten op afstand $i-1$ van $y$. Bijgevolg is $c_i = t_i + 1$. De overige punten op deze rechten zijn buren van $x$ die op afstand $i$ van $y$ liggen. Omdat op elke rechte een uniek punt moet liggen dichtst bij $y$, zijn dit ook de enige buren van $x$ op afstand $i$ van $y$. We vinden $a_i = (s-1)(t_i+1)$. De overige $t - t_i$ rechten door $x$ bevatten naast $x$ enkel punten op afstand $i+1$ van $y$, dus is $b_i = s(t - t_i)$. Het aantal buren van een willekeurig punt van de schierveelhoek is gelijk aan $k := s(t+1)$. Samengevat krijgen we

$$a_i = (s-1)(t_i+1), \quad b_i = s(t - t_i), \quad c_i = t_i + 1, \quad \text{voor } 0 \leq i \leq d.$$

In het vervolg van dit hoofdstuk houden we ons enkel bezig met schier-$2d$-hoeken. We mogen dus altijd veronderstellen dat er geen punt $x$ en rechte $l$ bestaan zodat $d(x,l)=d$. In hoofdstuk 2 zagen we dat voor $1 \leq i \leq d$ geldt dat $|\Gamma_i(x)| = k_i$ met $k_0 = 1$, $k_1 = s(t+1)$ en $k_{i+1} = \frac{k_i b_i}{c_{i+1}}$, $1 \leq i \leq d-1$.

**Lemma 4.4.** *Er geldt dat* $k_i = \frac{s^i \prod_{j=0}^{i-1}(t-t_j)}{\prod_{j=1}^{i}(1+t_j)}$.

**Bewijs.** Voor $i=0$ wordt bovenstaande formule gelijk aan 1. Voor $i=1$ krijgen we

$$k_1 = \frac{s(t-t_0)}{1+t_1} = s(t+1).$$

We besluiten dit bewijs door de formule in te vullen in de recursiebetrekking $k_{i+1} = \frac{k_i b_i}{c_{i+1}}$:

$$\frac{s^{i+1} \prod_{j=0}^{i}(t-t_j)}{\prod_{j=1}^{i+1}(1+t_j)} = \frac{s(t-t_i)}{t_{i+1}+1} \frac{s^i \prod_{j=0}^{i-1}(t-t_j)}{\prod_{j=1}^{i}(1+t_j)}.$$

We zien dat deze gelijkheid inderdaad klopt. □

Hieruit volgt dat

$$v = \sum_{i=0}^{d} k_i = \sum_{i=0}^{d} \frac{s^i \prod_{j=0}^{i-1}(t-t_j)}{\prod_{j=1}^{i}(1+t_j)}. \tag{4.1}$$

We geven ook nog een delingsvoorwaarde mee.

**Lemma 4.5.** *In een schierveelhoek $S$ met diameter $d > 2$ geldt dat $t_2(t_2+1)|t_i(t_i+1)$ voor alle $1 \leq i \leq d$.*

**Bewijs.** We nemen twee punten $x$ en $y$ in $S$ met $d(x,y) = i$. Door enkel te kijken naar de punten op de kortste paden tussen $x$ en $y$, verkrijgen we een schier-$2i$-hoek $S'$. In $S'$ stellen we nu het aantal quads door $x$. We weten dat twee snijdende rechten een quad opspannen, dus zo vinden we $\frac{(t_i+1)t_i}{(t_2+1)t_2}$ quads. □

## 2 Punt-quad relaties

**Definitie 4.6.** *Als in een quad $Q$ in de schierveelhoek $X$ er een uniek punt $x'$ is dat het dichtst bij een vast punt $x$ ligt, dan noemen we $x$ klassiek ten opzichte van $Q$. Als dit voor elk punt en quad in de schierveelhoek $X$ geldt, noemen we $X$ klassiek.*

**Definitie 4.7.** *Als voor een quad $Q$ en een punt $x$ in de schierveelhoek $X$ geldt dat de punten van $Q$ het dichtst bij $x$ een ovoïde vormen, dan is $x$ ovoïdaal ten opzichte van $Q$.*

**Definitie 4.8.** *Voor een vast quad $Q$ is de verzameling $N_{i,C}$ de verzameling van klassieke punten op afstand $i$ van $Q$ en $N_{i,O}$ de verzameling van ovoïdale punten op afstand $i$.*

Dankzij stelling 1.22 van [9] weten we dat dit de enige twee mogelijke relaties zijn tussen een punt en een quad, tenzij we in een complete bipartiete graaf werken. We bepalen nu voor een vast quad $Q$ in een schierveelhoek hoeveel punten er in $N_{i,C}(Q)$ en $N_{i,Q}(Q)$ liggen met $0 \leq i \leq d$.

**Lemma 4.9.** *Er geldt dat* $N_{1,O} = N_{d-1,C} = 0$.

**Bewijs.** We nemen een quad $Q$ en een punt $x \in N_{1,O}$. Dan vinden we en ovoïde in $Q$ bestaande uit punten op afstand 1 van $x$. Nemen we twee punten uit deze ovoïde, dan liggen deze punten op afstand 2 van elkaar. Het punt $x$ ligt dan op een kortste pad tussen deze twee punten, en moet door de definitie van een quad dus in het quad liggen. Dit is strijdig met $x \in N_{1,O}(Q)$, dus moet $N_{1,O}(Q)$ leeg zijn.

Als we een punt $y$ uit $N_{d-1,C}(Q)$ nemen, dan is er een uniek punt $y' \in Q$ dat het dichtst bij $y$ ligt. De diameter van $Q$ is 2, dus vinden we een punt $y''$ op afstand 2 van $y'$. De afstand tussen $y$ en $y''$ moet door de driehoeksongelijkheid kleiner zijn dan $d+1$. Als ze kleiner of gelijk zou zijn aan $d-1$, dan is $y'$ niet meer het unieke punt van $Q$ dichtst bij $y$. Als $d(y,y'') = d$, dan ligt er een gemeenschappelijke buur $z$ van $y'$ en $y''$ op afstand $d$ van $y$, waardoor er twee punten zijn op de rechte $zy''$ op afstand $d$ van $y$. Er moet dus een punt op deze rechte zijn dat op afstand $d-1$ ligt van $y$. Omdat dit punt sowieso in $Q$ ligt, moet dit punt dan gelijk zijn aan $y'$, strijdig met $d(y',y'') = 2$. Het punt $y''$ ligt dus op afstand $d+1$ van $y$. Dit is dan weer strijdig met de definitie van $d$ als diameter van de schierveelhoek. □

**Lemma 4.10.** *Als we een quad $Q$ en een punt $x \in N_{i,C}(Q)$ nemen, dan gaan door $x$*

- $1 + t_i$ *rechten die een punt bevatten van* $N_{i-1,C}(Q)$,
- $(1 + t_2)(t_{i+1} - t_i)$ *rechten die enkel punten bevatten van* $N_{i,C}(Q)$,
- $t - t_{i+2}$ *rechten die punten bevatten van* $N_{i+1,C}(Q)$ *en*
- $t_{i+2} - t_i - (1 + t_2)(t_{i+1} - t_i)$ *rechten die een punt bevatten van* $N_{i+1,O}$.

**Bewijs.** Als $x$ collineair is met een punt $z$ van $\Gamma_{i-1}(Q)$, dan moet $z \in N_{i-1,C}(Q)$. Anders vinden we immers dat de punten van $Q$ die het dichtst bij $z$ liggen een ovoïde vormen. Deze punten zijn een deelverzameling van de punten van $Q$ die het dichtst bij $x$ liggen en zijn dus een deelverzameling van $x'$ met $x'$ het unieke punt van $Q$ het dichtst bij $x$. Hier vinden we een strijdigheid. Omdat $d(x, x') = i$, vinden we $t_i + 1$ rechten door $x$ die een punt bevatten op afstand $i - 1$ van $x'$. Bijgevolg liggen deze punten ook ook op afstand $i - 1$ van $Q$. Deze rechten bevatten dus een punt van $N_{i-1,C}(Q)$.

We nemen nu een rechte in $Q$ door $x'$. Deze rechte bevat dan een punt $z$ op afstand $i + 1$ van $x$. We vinden $t_{i+1} + 1$ rechten door $x$ die een punt $u$ bevatten op afstand $i$ van $z$. Voor $t_i + 1$ van deze rechten is $u$ een punt van $N_{i-1,C}(Q)$. Voor de overige rechten is $u$ een punt van $N_{i,C}(Q)$. Doordat $d(u, z) = i$, $d(x, x') = i$ en $d(x, z) = i + 1$, zijn de rechten $ux$ en $zx'$ parallel. Bijgevolg liggen alle punten van $ux$ in $N_{i,C}(Q)$. Omdat we de rechte door $x'$ willekeurig gekozen hebben, vinden we $(1 + t_2)(t_{i+1} - t_i)$ rechte door $x$ in $N_{i,C}(Q)$.

We nemen een punt $y$ op afstand 2 van $x'$, zodat $d(x, y) = i + 1$. We bewijzen nu eerst dat de rechten door $x$ die een punt bevatten van $N_{i+1,C}(Q)$ exact de rechten zijn die geen punt bevatten van $\Gamma_{i+1}(y)$. Elke buur van $x$ in $N_{i+1,C}(Q)$ ligt op afstand $i + 1$ van $x'$. Alle andere punten liggen verder van deze buur van $x$, aangezien er een uniek punt van $Q$ het dichtst bij deze buur moet liggen. De rechten door $x$ die een punt bevatten van $N_{i+1,C}(Q)$ kunnen dus geen punt bevatten van $\Gamma_{i+1}(y)$. We nemen nu een rechte $l$ die geen punten bevat van $N_{i+1,C}(Q)$. Als $l$ een punt bevat van $N_{i+1,O}(Q)$, dan bevat bepaalt het punt $l \bigcap N_{i+1,O}(Q)$ een ovoïde in $Q$ die onder andere het punt $x'$ bevat. Door lemma 9(ii) van [4] ligt $y$ ook in deze ovoïde, dus ligt het punt $l \bigcap N_{i+1,O}(Q)$ op afstand $i + 1$ van $y$. Als $l$ een rechte is bevat in $N_{i,C}(Q)$, dan vinden we in $Q$ een rechte $l'$ door $x'$ parallel aan $l$. De rechte $l'$ bevat sowieso een buur van $y$, omdat we anders twee punten in $Q$ vinden op afstand 3 van elkaar. Als $l$ een punt $z$ van $N_{i-1,C}$ bevat, dan is $d(z, y) = i + 1$.

We weten dat er van de $1 + t$ rechten door $x$ er $1 + t_{i+2}$ rechten zijn die een punt bevatten op afstand $i + 1$ van $y$. Zo bekomen we $t - t_{i+2}$ rechten door $x$ die een punt bevatten van $N_{i+1,C}(Q)$.

Als een rechte door $x$ geen punten bevat van $N_{i-1,C}(Q) \bigcup N_{i+1,C}(Q)$ en naast $x$ ook geen punten bevat van $N_{i,C}(Q)$, dan moet het punten bevatten van $N_{i+1,O}(Q)$. Doordat we zo alle mogelijkheden bekeken hebben, vinden we dat het aantal rechten door $x$ dat punten bevat van $N_{i+1,O}$ gelijk is aan $1 + t - (t - t_{i+2}) - (1 + t_2)(t_{i+1} - t_i) - (1 + t_i) = t_{i+2} - t_i - (1 + t_2)(t_{i+1} - t_i)$. □

**Lemma 4.11.** *Voor een quad $Q$ is* $|N_{i,C}(Q)| = (1 + s)(1 + st_2)\frac{s^i \prod_{j=2}^{i+1}(t-t_j)}{\prod_{j=1}^{i}(1+t_j)}$

**Bewijs.** We tellen eerst voor een vast punt $x \in Q$ het aantal koppels $(y, P)$ waarbij $y$ een punt is in $N_{i,C}(Q)$ met $d(x, y) = i$ en $P$ een pad van $x$ naar $y$. Voor een vast punt $y$ vinden we $1 + t_i$ rechten die een punt $z$ bevatten op afstand $i - 1$ van $x$. Door $z$ vinden we $1 + t_{i-1}$ rechten die een punt bevatten op afstand $i - 2$ van $x$. Zo verdergaand vinden we $\prod_{j=1}^{i}(1 + t_j)$ paden van $y$ naar $x$, dus $Y \prod_{j=1}^{i}(1 + t_j)$ koppels $(y, P)$ met $Y$ het aantal punten van $N_{i,C}(Q)$ op afstand $i$ van $x$. Anderzijds vinden we $t - t_2$ rechten door $y$ die elk $s$ punten $v$ bevatten van $N_{1,C}$. Door elk punt $v$ vinden we $t - t_3$ rechten die elk $s$ punten bevatten van $N_{3,C}(Q)$. Zo verdergaand vinden we $\prod_{j=2}^{i+1} s(t - t_j)$ koppels $(y, P)$. Hieruit vinden we dat $Y = \frac{s^i \prod_{j=2}^{i+1}(t-t_j)}{\prod_{j=1}^{i}(1+t_j)}$. Als we dit toepassen op elk punt $x \in Q$, dan vinden we $(1+s)(1+st_2)\frac{s^i \prod_{j=2}^{i+1}(t-t_j)}{\prod_{j=1}^{i}(1+t_j)}$ punten in $N_{i,C}(Q)$ □

**Lemma 4.12.** *Voor een quad $Q$ geldt dat* $N_{2,O}(Q) = \frac{s^2(1+s)(t-t_2)(t_3-(1+t_2)t_2)}{1+t_2}$.

**Bewijs.** We tellen puntendrietallen $(x, y, z)$ met $x, y \in Q$, $d(x, y) = 1$, $d(y, z) = 2$ en $d(x, z) = 3$. We schrijven hier $p^i_{jk}$ voor de grootte van de verzameling $\{z | d(x, z) = j$ en $d(z, y) = k$ voor $x, y$ met $d(x, y) =$

$i\}$. Enerzijds vinden we zo $|Q|$ mogelijke punten $x$, $s(t_2+1)$ mogelijke punten $y$ per punt $x$, en $p^1_{2,3}$ mogelijke punten $z$ voor vastgekozen punten $x$ en $y$. We vinden zo $s(1+t_2)(1+s)(1+st_2)p^1_{2,3}$ drietallen. We tellen nu eerst de punten $z$. Als $z \in N_{1,C}(Q)$ zit, dan vinden we $s(t_2+1)$ mogelijke punten $y$, en voor een vast punt $y$ vinden we $st_2$ mogelijke punten $x$. Als $z \in N_{2,C}$ zit, dan vinden we één mogelijk punt $y$ en $s(t_2+1)$ mogelijke punten $x$. Als $z \in N_{2,O}(Q)$ zit, vinden we $1+st_2$ mogelijke punten $y$, en $s(t_2+1)$ mogelijke punten $x$ per vast punt $y$. We vinden dus

$$s(1+t_2)(1+s)(1+st_2)p^1_{2,3} = |N_{1,C}(Q)|s^2t_2(t_2+1) + |N_{2,C}|s(t_2+1) + |N_{2,O}|s(t_2+1)(1+st_2),$$
$$|N_{2,C}| + |N_{2,O}|(1+st_2) = (1+s)(1+st_2)p^1_{2,3} - s^2t_2(1+s)(1+st_2)(t-t_2).$$

Uit lemma 4.11 vinden we dat $|N_{2,C}(Q)| = \frac{s^2(1+s)(1+st_2)(t-t_2)(t-t_3)}{1+t_2}$. Hiermee wordt het bovenstaande

$$|N_{2,O}|(1+st_2) = (1+s)(1+st_2)p^1_{2,3} - s^2t_2(1+s)(1+st_2)(t-t_2) - \frac{s^2(1+s)(1+st_2)(t-t_2)(t-t_3)}{1+t_2},$$
$$|N_{2,O}| = (1+s)p^1_{2,3} - s^2t_2(1+s)(t-t_2) - \frac{s^2(1+s)(t-t_2)(t-t_3)}{1+t_2}.$$

We moeten nu enkel nog $p^1_{2,3}$ berekenen. Hiervoor nemen we een vast punt $x$ en tellen we koppels $(z,l)$ met $z$ een punt op afstand 3 van $x$, en $l$ een rechte door $x$ die een punt op afstand 2 van $z$ bevat. We vinden zo enerzijds $|\Gamma_3(x)|(1+t_3)$ koppels. Anderzijds vinden we $s(t+1)$ buren $y$ van $x$. Per buur vinden we $p^1_{2,3}$ mogelijke punten $z$. De rechte door $x$ is uniek bepaald door de buur $y$ van $x$. Zo vinden we

$$p^1_{2,3} = \frac{|\Gamma_3(x)|(1+t_3)}{s(t+1)} = \frac{s^3(t+1)t(t-t_2)(1+t_3)}{s(t+1)(1+t_2)(1+t_3)} = \frac{s^2t(t-t_2)}{(1+t_2)}.$$

In de tweede gelijkheid maken we hierbij gebruik van Lemma 4.4. Zo vinden we

$$|N_{2,O}| = (1+s)\frac{s^2t(t-t_2)}{(1+t_2)} - s^2t_2(1+s)(t-t_2) - \frac{s^2(1+s)(t-t_2)(t-t_3)}{1+t_2}$$
$$= s^2(1+s)(t-t_2)\frac{t-t_2(t_2+1)-t+t_3}{1+t_2} = \frac{s^2(1+s)(t-t_2)(t_3-t_2(t_2+1))}{1+t_2}.$$

Dit bewijst het lemma. □

Voor een klassieke schierveelhoek met $d > 2$ moet $N_{2,O}(Q)$ voor elk quad $Q$ een ledige verzameling zijn. Dit kan enkel als $t_3 = t_2(1+t_2)$.

**Lemma 4.13.** *In een niet-klassieke schierveelhoek met diameter $d > 3$ geldt $1+t_3 \geq (1+t_2)(1+st_2)$*

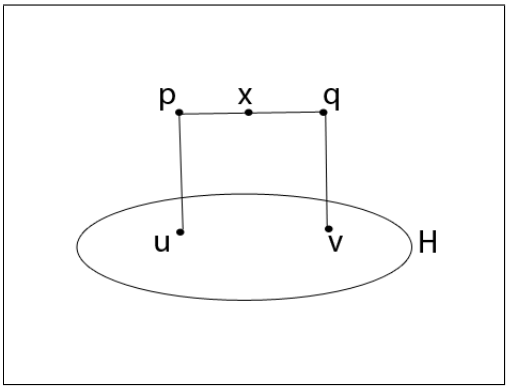
**Bewijs.** We nemen in ons schierveelhoek een quad $Q$ en een punt $x \in N_{2,O}(Q)$. Het punt $x$ en het quad $Q$ spannen dan samen een hex $H$ op, en in $H$ vinden we $1+t_3$ rechten door $x$. Van deze rechten zijn er $(1+t_2)(1+st_2)$ rechten die een punt bevatten op afstand 1 van $Q$. We vinden bijgevolg $1+t_3 \geq (1+t_2)(1+st_2)$. □

# 3 Punt-hex relaties

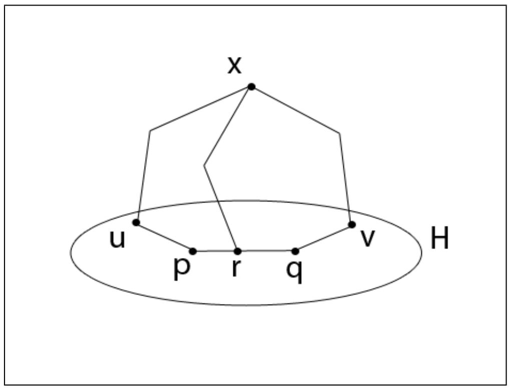
Net zoals bij quads, kunnen punten klassiek of ovoïdaal zijn ten opzichte van een hex. In tegenstelling tot quads, kunnen punten echter ook noch klassiek, noch ovoïdaal zijn ten opzichte van een hex.

Bij het bewijzen van de bestaansvoorwaarden voor schierachthoeken zullen we tellingen moeten uitvoeren in verband met een hex $H$ en een punt $x$ op afstand 2 van $H$. Om later het overzicht niet kwijt te geraken, voeren we deze tellingen op voorhand uit in een meer algemene setting.

**Lemma 4.14.** *Stel $H$ een hex en $x$ een punt met $d(x,H) = 2$, dan ligt elk puntenpaar in $\Gamma_2(x) \bigcap H$ op afstand 2 van elkaar.*




Figuur 4.1: Verduidelijking bij Lemma 4.14




Figuur 4.2: Verduidelijking bij Lemma 4.14

**Bewijs.** Stel $A := \Gamma_2(x) \bigcap H$, dan kunnen er geen twee punten $y, z$ in $A$ op afstand 1 van elkaar liggen, want dan zou er een punt op $yz$ op afstand 1 van $x$ moeten liggen. Stel $B := \Gamma_3(x) \bigcap H$ en neem $q \in B$. Het hex voortgebracht door $x$ en $q$ noemen we $H(x, q)$. We weten dat $H(x, q) \bigcap H$ geodetisch gesloten is als doorsnede van twee geodetisch gesloten ruimtes. Het moet dus een punt, rechte of quad zijn, want als het een hex zou zijn, dan zou $H(x, q) = H$, maar $x \notin H$, een strijdigheid. Alle buren van $q$ in $A$ liggen in $H(x, q) \bigcap H$, dus als $q$ meer dan één buur in $A$ heeft, dan is $H(x, q) \bigcap H$ een quad. Neem nu het puntenpaar $u, v$ in $A$ met $d(u, v) = 3$. Stel dat $upqv$ het pad is van $u$ naar $v$. We weten dat er geen adjacente puntenparen in $A$ liggen, dus $p, q \notin A$. Als $p, q$ op afstand 1 van $X$ zouden liggen (zie Figuur 4.1), dan zou $x$ op de rechte $pq$ liggen. Het punt $x$ ligt dan op een kortste pad van $u$ naar $v$, dus in $H$, een strijdigheid. De enige mogelijkheid is dat $p, q \in B$ (zie Figuur 4.2). Omdat de rechte $pq$ twee punten op afstand 3 van $x$ bevat, bevat het ook een punt $r$ op afstand 2 van $x$, dus $r \in A$. We hebben dus een punt $q \in B$ met meerdere buren in $A$, namelijk $v$ en $r$. Nu bevat het quad $H(x, q) \bigcap H$ de punten $q, v, r$, dus ook $p$ omdat $p \in qr$. Omdat $u$ op een kortste pad van $p$ naar $x$ ligt en $u \in H$, ligt $u$ ook in het quad $H(x, q) \bigcap H$. We hebben dus twee punten in een quad op afstand 3 van elkaar, een strijdigheid. □

We kunnen nu een design construeren. De punten zijn de punten in $A$ en de blokken zijn de doorsnedes van $A$ met quads $Q$ die we construeren als doorsnede van $H$ met een hex dat $x$ bevat, net zoals in het bewijs van het vorige lemma. Een punt $z$ in $A$ is nooit adjacent aan een ander punt uit $A$, dus zulke doorsnedes zullen steeds deel zijn van een ovoïde in $Q$. Er zijn geen volledige rechten bevat in $Q \backslash A$, omdat we anders net zoals in het bewijs hierboven twee punten bekomen in $Q$ op afstand 3 van elkaar. We besluiten dat elke rechte in $Q$ door een punt $z \in Q \backslash A$ punten bevat van $A$. Hieruit volgt nu dat $A \bigcap Q$ een ovoïde is van $Q$. Omdat twee punten een ovoïde bepalen, en een ovoïde $1 + st_2$ punten bevat, bekomen we het Steinersysteem $S(2, st_2 + 1, |A|)$.

We nemen nu een reguliere schierachthoek met parameters $(s, t_2, t_3, t_4)$ en $s > 1, t_2 > 0$. Stel $H$ een vast hex en $x$ een vast punt met $d(x, H) = 2$. We definiëren de volgende verzamelingen $A, B, B_0, B_1, B_2, C$ met respectievelijke groottes $a, b, b_0, b_1, b_2, c$.

$$\begin{aligned}
A &:= \Gamma_2(x) \bigcap H, \\
B &:= \Gamma_3(x) \bigcap H, \\
B_0 &:= \{y \in B | \Gamma_1(y) \bigcap A = \emptyset\}, \\
B_1 &:= \{y \in B || \Gamma_1(y) \bigcap A| = 1\}, \\
B_2 &:= \{y \in B || \Gamma_1(y) \bigcap A| = t_2 + 1\}, \\
C &:= \Gamma_4(x) \bigcap H.
\end{aligned}$$

Als we nu het aantal punten van het hex tellen, zien we dat

$$a + b_0 + b_1 + b_2 + c = v = (s + 1) \left(1 + st_3 + \frac{s^2 t_3 (t_3 - t_2)}{t_2 + 1}\right). \tag{4.2}$$

Tellen we koppels $(a', b')$ met $a' \in A$, $b' \in B$ en $a'$ adjacent aan $b'$, dan zien we enerzijds dat een vast punt $a' \in A$ op $t_3 + 1$ rechten in $H$ ligt, en dat er op elke rechte $s$ punten $b' \in B$ liggen. Anderzijds vinden we voor punten uit $B_0$ geen buren in $A$, voor punten uit $B_1$ vinden we per punt exact één buur in $A$ en voor punten uit $B_2$ vinden we $t_2 + 1$ buren in $A$. We bekomen

$$b_1 + b_2(t_2 + 1) = sa(t_3 + 1). \tag{4.3}$$

Tellen we koppels $(b', c')$ met $b' \in B$, $c' \in C$ en $b'$ adjacent aan $c'$, dan vinden we voor een vast punt $c'$ dat elke rechte in $H$ door $c'$ exact 1 punt bevat op afstand 3 van $x$, dus vinden we $t_3 + 1$ punten $b'$. Anderzijds vinden we voor een punt $b'$ uit $B_0$ en voor elke rechte $L$ in $H$ door $b'$ dat $b'$ het punt is op $L$ het dichtst bij $x$. Alle $s$ andere punten liggen bijgevolg in $C$. Voor een punt $b'$ in $B_1$ vinden we dat één rechte door $b'$ een punt bevat op afstand 2 van $x$, dus dat $t_3$ rechten door $b'$ punten bevatten in $C$. Voor een punt $b'$ in $B_2$ vinden we $t_3 - t_2$ rechten die punten bevatten van $C$. We bekomen

$$sb_0(t_3 + 1) + sb_1t_3 + sb_2(t_3 - t_2) = c(t_3 + 1). \tag{4.4}$$

Tellen we het aantal blokken in het Steinersysteem $S(2, 1 + st_2, a)$, dan vinden we $\frac{a(a-1)}{(1+st_2)st_2}$ blokken. Anderzijds zagen we ook dat een blok in dit Steinersysteem overeenkomt met een quad die $A$ snijdt. Zo'n quad was gelijk aan $H(x, q) \bigcap H$ voor een bepaald punt $q \in B$ en ligt dus volledig bevat in $H$. De punten van $Q \bigcap A$ vormen nu een ovoïde in $Q$, dus vinden we dat de punten $q$ van $Q \backslash A$ altijd meerdere buren in $A$ hebben (namelijk één per rechte door $q$, dus $t_2 + 1$). Al deze punten liggen dus in $B_2$. Het aantal punten in $Q \bigcap B_2$ is $(1+s)(1+st_2) - (1+st_2) = s(1+st_2)$. We vinden dus $\frac{b_2}{s(1+st_2)}$ blokken. Samengevat krijgen we de volgende gelijkheid:

$$\frac{a(a-1)}{(1 + st_2)st_2} = \frac{b_2}{s(1 + st_2)}.$$

Dit kunnen we ook schrijven als

$$\frac{a(a-1)}{t_2} = b_2. \tag{4.5}$$

Tellen we (4.3) en (4.4) bij elkaar op, dan krijgen we

$$\begin{aligned} sa(t_3 + 1) + s^{-1}c(t_3 + 1) &= b_1 + (t_2 + 1)b_2 + b_0(t_3 + 1) + b_1t_3 + b_2(t_3 - t_2) \\ &= b_0(t_3 + 1) + b_1(t_3 + 1) + b_2(t_3 + 1), \\ sa + s^{-1}c &= b_0 + b_1 + b_2. \end{aligned}$$

Als we dit invullen in (4.2) krijgen we

$$\begin{aligned} a + c + sa + s^{-1}c &= (s + 1)\left(1 + st_3 + \frac{s^2t_3(t_3 - t_2)}{t_2 + 1}\right), \\ (s + 1)a + \frac{s + 1}{s}c &= (s + 1)\left(1 + st_3 + \frac{s^2t_3(t_3 - t_2)}{t_2 + 1}\right), \\ a + s^{-1}c &= 1 + st_3 + \frac{s^2t_3(t_3 - t_2)}{t_2 + 1}. \end{aligned} \tag{4.6}$$

We tellen nu puntenparen $(y, z)$ met $y \sim x$, $z \in B_0$ en $d(y, z) = 2$. We vinden voor een vast punt $z$ dan $t_3 + 1$ mogelijke punten $y$. Voor een vast punt $y$ (zo zijn er hoogstens evenveel als het aantal buren van $x$ dus $s(t + 1)$) vinden we hoogstens $a_{\max} := \max\{|\Gamma_2(y) \bigcap H| \text{ met } d(y, H) = 2\}$ punten $z$. Zo bekomen we

$$b_0(t_3 + 1) \leq s(t + 1)a_{\max}.$$

We tellen nu koppels $(y, z)$ met $y$ een buur van $x$, $z$ in $H$ en $d(y, z) = 2$. We vinden de voor een punt $z$ in $A$ per rechte $l$ door $x$ dat een punt bevat op afstand 1 van $z$ als mogelijke punten alle punten van $l$ behalve $x$ en het punt op afstand 1 van $z$. Zo zijn er $s - 1$ per rechte $l$. Voor een punt $z$ in $B$ vinden we voor elke rechte door $x$ die een punt bevat op afstand 2 van $z$ één uniek punt, namelijk het punt op afstand 2 van $z$. Voor punten in $C$ vinden we door de driehoeksongelijkheid geen mogelijke punten $y$. We bekomen zo $a(t_2 + 1)(s - 1) + b(t_3 + 1)$ koppels. Per punt in $A$ vinden we anderzijds $t_2 + 1$ mogelijke punten $y$, en $s(t_3+1)$ mogelijke punten $z$. Voor de overige $s(t+1)-a(t_2+1)$ mogelijke punten $y$ vinden we hoogstens $a_{\max}$ punten $z$. We vinden

$$a(t_2+1)(s-1)+b(t_3+1) \leq (s(t+1)-a(t_2+1))a_{\max}+a(t_2+1)s(t_3+1). \tag{4.7}$$

Uit (4.5) en (4.3) vinden we

$$\begin{aligned} b_1+\frac{(t_2+1)a(a-1)}{t_2} &= sa(t_3+1),\\ \frac{(t_2+1)a(a-1)}{t_2} &\leq sa(t_3+1),\\ (t_2+1)(a-1) &\leq st_2(t_3+1). \end{aligned}$$

Dit kunnen we eveneens schrijven als

$$\begin{aligned} a-1 &\leq s(t_3+1)\frac{t_2}{t_2+1} = s(t_3+1)(1-\frac{1}{t_2+1}) = s(t_3+1)-\frac{s(t_3+1)}{t_2+1}\\ &\leq s(t_3+1)-\frac{s(t_2+1)(1+st_2)}{t_2+1} = s(t_3+1)-s(1+st_2). \end{aligned} \tag{4.8}$$

Als laatste grens vinden we

$$\begin{aligned} 0 \leq b_0 &= sa+s^{-1}c-b_1-b_2\\ &= sa+1+st_3+\frac{s^2t_3(t_3-t_2)}{1+t_2}-a-sa(t_3+1)+b_2(t_2+1)-b_2\\ &= 1+st_3+\frac{s^2t_3(t_3-t_2)}{1+t_2}-a(st_3+1)+b_2t_2\\ &= 1+st_3+\frac{s^2t_3(t_3-t_2)}{1+t_2}-a(st_3+1)+a(a-1)\\ &= 1+st_3+\frac{s^2t_3(t_3-t_2)}{1+t_2}-a(st_3+2)+a^2. \end{aligned} \tag{4.9}$$

Deze grenzen zijn allemaal gebaseerd op het feit dat er een punt $x$ bestaat zodat $d(x,H)=2$. Dit is het geval als we een niet-klassieke schierachthoek $X$ nemen, met daarin een schierzeshoek $H$ en $x$ een punt van $X$. Inderdaad, we nemen eerst een punt $y$ in $\Gamma_1(H)$. Een rechte in $\Gamma_1(H)$ kunnen we altijd projecteren op een rechte in $H$. We vinden zo dat $y$ op één rechte $l$ ligt die een punt $z$ van $H$ bevat. Nemen we nu een willekeurige rechte $m$ door $z$ in $H$, dan kijken we in het quad voortgebracht door $l$ en $m$ om rechten te vinden parallel aan $m$. Deze gaan door $y$ en raken $m$ niet, dus moeten in $\Gamma_1(H)$ liggen. We vinden zo $t_2$ rechten. In totaal vinden we dus $t_2(t_3+1)$ rechten door $y$ in $\Gamma_1(H)$. Als er nu geen punten $x$ zouden bestaan, dan zou $\Gamma_2(H)$ ledig zijn, dus dan vinden we geen rechten door $y$ die $\Gamma_2(H)$ raken. We vinden bijgevolg $t_4=t_2(t_3+1)$. We bekijken nu het design van quads en hexen door een vaste rechte $r$. We nemen twee quads $Q$ en $Q'$ door $r$ en twee verschillende punten $x$ en $x'$ op $r$. In $Q$ vinden we dan een buur $u$ van $x$ die niet op $r$ ligt. In $Q'$ vinden we een buur $u'$ van $x'$ die niet op $r$ ligt. We vinden een pad $uxx'u'$ van lengte 3 tussen $u$ en $u'$. Stel dat $u$ en $u'$ buren zijn, dan zou $u'$ in het quad $Q$ liggen, een strijdigheid. Als $u$ en $u'$ op afstand 2 van elkaar zouden liggen, dan vinden we een gemeenschappelijke buur $z$ van $u$ en $u'$. Op $r$ vinden we dan een buur $z'$ van $z$. Dit punt $z'$ ligt dus in $Q$ en in $Q'$. Hieruit volgt dat $z$ ook in $Q$ en $Q'$ ligt, waardoor zowel $u$ en $u'$ ook in $Q$ en $Q'$ liggen. Dit is strijdig met onze keuze van $u$ en $u'$. De punten $u$ en $'$ liggen dus op afstand 3 van elkaar, en brengen dus een hex $H$ voort. Omdat $r$ op een kortste pad tussen $u$ en $u'$ ligt, bevat $H$ de rechte $r$. Het design is dus het Steinersysteem $S(2,K,V)$. De grootte van een blok is gelijk aan het aantal quads door $r$ die in een vast hex door $r$ liggen. Doordat een quad wordt bepaald door twee snijdende rechten, tellen we als grootte van een blok

$$K := \frac{(s+1)t_3}{(s+1)t_2} = \frac{t_3}{t_2}.$$

Hieruit volgt de delingsvoorwaarde $t_2|t_3$. Het aantal blokken $R$ door een vast punt van het design wordt dan het aantal hexen door een vast quad $Q$ door $r$. Als we een rechte $l$ nemen die $r$ snijdt, maar niet in $Q$ ligt, dan vinden we dat elk punt op $l$ klassiek is net opzichte van $Q$. We vinden dus een punt $x$ op $l$ een een punt $y \in Q$ op afstand 3 van $x$. De punten $x$ en $y$ brengen een hex voort dat $Q$ bevat. Elke rechte die $r$ snijdt maar niet in $Q$ ligt brengt bijgevolg samen met $Q$ een hex voort. Zo vinden we

$$R = \frac{(s+1)(t_4 - t_2)}{(s+1)(t_3 - t_2)} = \frac{t_4 - t_2}{t_3 - t_2}.$$

Dit zegt ons onder andere ook dat $t_3 - t_2$ een deler moet zijn van $t_4 - t_2$.

In het Steinersysteem $S(2, K, V)$ geldt dat $bK = vR$ met $b$ het aantal blokken in het design. In sectie 3 van hoofdstuk 10 van [2] vinden we de ongelijkheid $b \geq v$. Als $R > 1$ resulteert dit in $K \leq R$. In het volgende lemma bewijzen we een sterkere ongelijkheid.

**Lemma 4.15.** *Als in het Steinersysteem $S(2, K, V)$ geldt dat $R = K + m$, dan $K|m(m-1)$.*

**Bewijs.** Het aantal blokken in dit Steinersysteem is $\frac{V(V-1)}{K(K-1)}$. We weten ook dat $V = 1 + R(K-1)$. Hieruit halen we dus dat het volgende getal geheel is:

$$\frac{(1 + R(K-1))R(K-1)}{K(K-1)} = \frac{(1 + R(K-1))R}{K} = \frac{(K+m)(1 + (K+m)(K-1))}{K}.$$

Als we alle termen in de teller weglaten die een factor $K$ bevatten, bekomen we dat $\frac{m(1-m)}{K}$. Dit is enkel een geheel getal als $K|m(m-1)$. □

Hieruit volgt dus dat ofwel $R = 0$, $R = 1$, $R = K$, $R = K + 1$ (in deze gevallen is $m(m-1) = 0$) of $R > K + \sqrt{K}$. Inderdaad, stel dat $R = K + m$ en $m \leq \sqrt{K}$, dan is $K \leq m^2 - m \leq K - \sqrt{K}$, een strijdigheid. Als $R = 0$, dan is $t_4 = t_2$, een strijdigheid. Als $R = 1$, dan liggen alle quads door een rechte in hetzelfde hex, wat ook onmogelijk is. Er moet dus gelden dat $R \geq K$. Als $\Gamma_2(H)$ leeg is, dan vinden we hiervoor

$$\begin{aligned}
\frac{t_3}{t_2} &\leq \frac{t_2(t_3+1) - t_2}{t_3 - t_2} = \frac{t_2 t_3}{t_3 - t_2}, \\
\frac{1}{t_2} &\leq \frac{t_2}{t_3 - t_2}, \\
t_3 - t_2 &\leq t_2^2, \\
t_3 &\leq t_2(t_2 + 1).
\end{aligned}$$

Dit kan enkel als $t_3 = t_2(t_2 + 1)$ dus als $X$ klassiek is.

# 4 Eigenwaarden en Kreinvoorwaarden

## 4.1 Algemene resultaten

We zoeken nu enkele eigenwaarden van de matrices $A_i$ gedefiniëerd door

$$(A_i)_{xy} = \begin{cases} 0 & \text{als } d(x,y) \neq i \\ 1 & \text{als } d(x,y) = i. \end{cases}$$

We stellen hierbij $A := A_1$. De matrix $A$ is exact de adjacentiematrix van de collineariteitsgraaf van de schierveelhoek. We kunnen dus de resultaten uit hoofdstuk 2 hierop toepassen. Zo weten we al dat $\theta_0 := k = s(t+1)$ een eigenwaarde is van $A$ en dat $k_i$ een eigenwaarde is van $A_i$.

**Lemma 4.16.** *$\theta_1 := -t - 1$ is een eigenwaarde van $A$.*

**Bewijs.** Stel $N$ de incidentiematrix van $X$ met als rijen de punten van $X$, als kolommen de rechten van $X$, en $N_{xl} = 1$ als $x \in l$. Dan is $NN^T = A + (t+1)I$. Inderdaad, $(NN^T)_{xy}$ is het aantal rechten $l$ met $x \in l$ en $y \in l$. Deze matrix is positief semidefiniet als product van de matrix $N$ en de getransponeerde van $N$ dus elke eigenwaarde is niet-negatief. We vinden dat voor elke eigenwaarde $\lambda$ van $A$ geldt dat

$\lambda \geq -(t+1)$. Stel nu $M := \sum_{i=0}^{d}(-\frac{1}{s})^i A_i$. Deze matrix is verschillend van 0, want aangezien elke 2 punten een afstand hebben tot elkaar, is elk element gelijk aan een macht van $-\frac{1}{s}$. We vinden

$$
\begin{aligned}
AM &= \sum_{i=0}^{d}\left(-\frac{1}{s}\right)^i AA_i,\\
AM &= \sum_{i=0}^{d}\left(-\frac{1}{s}\right)^i (c_{i+1}A_{i+1} + a_iA_i + b_{i-1}A_{i-1})\\
&= \sum_{i=0}^{d}\left(-\frac{1}{s}\right)^i ((t_{i+1}+1)A_{i+1} + (s-1)(t_i+1)A_i + s(t-t_{i-1})A_{i-1})\\
&= \sum_{i=1}^{d+1}\left(-\frac{1}{s}\right)^{i-1} (t_i+1)A_i + \sum_{i=0}^{d}\left(-\frac{1}{s}\right)^i (s-1)(t_i+1)A_i + \sum_{i=-1}^{d-1}\left(-\frac{1}{s}\right)^{i+1} s(t-t_i)A_i\\
&= \sum_{i=0}^{d} \frac{-s(t_i+1)}{(-s)^i}A_i + \frac{(s-1)(t_i+1)}{(-s)^i}A_i + \frac{-(t-t_i)}{(-s)^i}A_i\\
&= \sum_{i=0}^{d} \frac{-(t+1)}{(-s)^i}A_i\\
&= -(t+1)M.
\end{aligned}
$$

Hier hebben we in de derde laatste gelijkheid gebruikgemaakt van $A_{-1} = A_{d+1} = 0$, $t_0 = -1$ en $t_d = t$. Zo vinden we dat $-(t+1)$ een eigenwaarde van $A$. □

Uit deze eigenwaarde kunnen we eigenwaarden van $A_i$, $0 \leq i \leq d$ vinden.

**Lemma 4.17.** *We hebben*

$$v_i(-t-1) = \frac{(-1)^i \prod_{j=0}^{i-1}(t-t_j)}{\prod_{j=1}^{i}(1+t_j)}$$

*voor* $0 \leq i \leq d$.

**Bewijs.** Uit het stuk over de afstandsreguliere grafen vinden we dat we moeten controleren dat

$$
\begin{gathered}
v_0(-t-1) = 1, \qquad v_1(-t-1) = -t-1,\\
(-t-1)v_i(-t-1) = (t_{i+1}+1)v_{i+1}(-t-1) + (s-1)(t_i+1)v_i(-t-1) + s(t-t_{i-1})v_{i-1}(-t-1).
\end{gathered}
$$

We vinden

$$
\begin{aligned}
v_0(-t-1) &= \frac{(-1)^0 \prod_{j=0}^{-1}(t-t_j)}{\prod_{j=1}^{0}(1+t_j)} = 1,\\
v_1(-t-1) &= \frac{(-1)^1 \prod_{j=0}^{0}(t-t_j)}{\prod_{j=1}^{1}(1+t_j)} = \frac{(-1)(t+1)}{1} = -t-1.
\end{aligned}
$$

De laatste gelijkheid die we moeten controleren wordt

$$
\begin{aligned}
(-t-1)\frac{(-1)^i \prod_{j=0}^{i-1}(t-t_j)}{\prod_{j=1}^{i}(1+t_j)} =&(t_{i+1}+1)\frac{(-1)^{i+1} \prod_{j=0}^{i}(t-t_j)}{\prod_{j=1}^{i+1}(1+t_j)} + (s-1)(t_i+1)\frac{(-1)^i \prod_{j=0}^{i-1}(t-t_j)}{\prod_{j=1}^{i}(1+t_j)}\\
&+ s(t-t_{i-1})\frac{(-1)^{i-1} \prod_{j=0}^{i-2}(t-t_j)}{\prod_{j=1}^{i-1}(1+t_j)}.
\end{aligned}
$$

In het rechterlid krijgen we

$$\frac{(t_{i+1}+1)(-1)^{i+1}\prod_{j=0}^{i}(t-t_j) + (s-1)(t_i+1)(t_{i+1}+1)(-1)^i\prod_{j=0}^{i-1}(t-t_j)}{\prod_{j=1}^{i+1}(1+t_j)}$$

$$
\begin{aligned}
&+\frac{s(t-t_{i-1})(t_i+1)(t_{i+1}+1)(-1)^{i-1}\prod_{j=0}^{i-2}(t-t_j)}{\prod_{j=1}^{i+1}(1+t_j)} \\
&=\frac{((-1)^{i+1}(t-t_i)+(-1)^i(s-1)(t_i+1)+(-1)^{i-1}s(t_i+1))\prod_{j=0}^{i-1}(t-t_j)}{\prod_{j=1}^{i}(1+t_j)} \\
&=(-1)^i(-t+t_i+st_i+s-t_i-1-st_i-s)\frac{\prod_{j=0}^{i-1}(t-t_j)}{\prod_{j=1}^{i}(1+t_j)} \\
&=(-1)^i(-t-1)\frac{\prod_{j=0}^{i-1}(t-t_j)}{\prod_{j=1}^{i}(1+t_j)}.
\end{aligned}
$$

Dit is exact gelijk aan het linkerlid. □

De Kreinvoorwaarde $q_{11r} \geq 0$ wordt

$$
\begin{aligned}
0 &\leq \sum_{l=0}^{d} k_l(u_l(\theta_1))^2 u_l(\theta_r) = \sum_{l=0}^{d}\left(\frac{v_l(\theta_1)}{k_l}\right)^2 v_l(\theta_r) \\
&= \sum_{l=0}^{d}\left(\frac{\frac{(-1)^l\prod_{j=0}^{l-1}(t-t_j)}{\prod_{j=1}^{l}(1+t_j)}}{\frac{s^l\prod_{j=0}^{l-1}(t-t_j)}{\prod_{j=1}^{l}(1+t_j)}}\right)^2 v_l(\theta_r) = \sum_{l=0}^{d}\left(\frac{(-1)^l}{s^l}\right)^2 v_l(\theta_r) \\
&= \sum_{l=0}^{d} s^{-2l} v_l(\theta_r). \qquad (4.10)
\end{aligned}
$$

Omdat $v_l(\theta_r)$ net een eigenwaarde is van $A_l$, is $\sum_{l=0}^{d}(-s)^{-2l}v_l(\theta_r)$ een eigenwaarde van $\sum_{l=0}^{d}(-s)^{-2l}A_l$. We hebben zo bewezen dat deze matrix positief semidefiniet is. Voor $r=1$ krijgen we nu

$$
0 \leq \sum_{l=0}^{d}\frac{(-1)^l\prod_{j=0}^{l-1}(t-t_j)}{s^{2l}\prod_{j=1}^{l}(1+t_j)}. \qquad (4.11)
$$

## 4.2 Schiervierhoeken

We passen de gevonden resultaten nu toe op schiervierhoeken. De gelijkheid (4.1) wordt hier

$$
v=\sum_{i=0}^{2}\frac{s^i\prod_{j=0}^{i-1}(t-t_j)}{\prod_{j=1}^{i}(1+t_j)} = 1+s(t+1)+s^2t=(1+s)(1+st).
$$

De Kreinvoorwaarde (4.11) wordt hier

$$
0 \leq 1-\frac{t+1}{s^2}+\frac{t}{s^4}=\left(1-\frac{1}{s^2}\right)\left(1-\frac{t}{s^2}\right).
$$

Er geldt dus $s=1$ of $t \leq s^2$. Om de eigenwaarden van de adjacentiematrix $A$ te zoeken, maken we gebruik va het feit dat $v_3(A)=A_3=0$, dus dat $v_3(\theta)=0$ voor elke eigenwaarde $\theta$. We vinden uit (2.1) dat

$$
\begin{aligned}
\theta v_2(\theta) &= c_3v_3(\theta)+a_2v_2(\theta)+b_1v_1(\theta), \\
\theta v_2(\theta) &= (s-1)(t+1)v_2(\theta)+st\theta, \\
0 &= (\theta-(s-1)(t+1))v_2(\theta)-st\theta.
\end{aligned}
$$

Opnieuw uit (2.1) volgt dat

$$
\theta v_1(\theta)=c_2v_2(\theta)+a_1v_1(\theta)+b_0v_0(\theta),
$$

$$\theta^2 = (t+1)v_2(\theta) + (s-1)\theta + s(t+1),$$
$$v_2(\theta) = \frac{\theta^2 - (s-1)\theta - s(t+1)}{t+1}.$$

De eigenwaarden van $A$ moeten dus voldoen aan de vergelijking

$$0 = (\theta - (s-1)(t+1))\frac{\theta^2 - (s-1)\theta - s(t+1)}{t+1} - st\theta,$$
$$0 = (\theta - (s-1)(t+1))(\theta^2 - (s-1)\theta - s(t+1)) - st(t+1)\theta,$$
$$0 = (\theta - (s-1))(\theta + t + 1)(\theta - s(t+1))$$

We vinden dus eigenwaarden $s(t+1), -t-1$ en $s-1$. Voor de eigenwaarden van $A_2$ vinden we

$$v_2(\theta) = \frac{\theta^2 - (s-1)\theta - s(t+1)}{t+1},$$
$$v_2(s(t+1)) = \frac{s^2(t+1)^2 - s(s-1)(t+1) - s(t+1)}{t+1} = s^2(t+1) - s(s-1) - s = s^2t,$$
$$v_2(-t-1) = \frac{(t+1)^2 + (s-1)(t+1) - s(t+1)}{t+1} = (t+1) + (s-1) - s = t,$$
$$v_2(s-1) = \frac{(s-1)^2 - (s-1)(s-1) - s(t+1)}{t+1} = -s.$$

De multipliciteiten vinden we uit de volgende gelijkheid.

$$f(\theta) = \frac{v}{\sum_{i=0}^d k_i u_i(\theta)^2} = \frac{\sum_{i=0}^d k_i}{\sum_{i=0}^d \frac{v_i(\theta)^2}{k_i}} = \frac{1 + s(t+1) + s^2t}{1 + \frac{\theta^2}{s(t+1)} + \frac{v_2(\theta)^2}{s^2t}}. \tag{4.12}$$

Voor de eigenwaarde $s(t+1)$ krijgen we de multipliciteit

$$\frac{1 + s(t+1) + s^2t}{1 + s(t+1) + s^2t} = 1.$$

Voor de eigenwaarde $-t-1$ krijgen we de multipliciteit

$$\frac{1 + s(t+1) + s^2t}{1 + \frac{t+1}{s} + \frac{t}{s^2}} = \frac{s^2(1+s)(1+st)}{(1+s)(s+t)} = \frac{s^2(1+st)}{s+t}.$$

Voor de eigenwaarde $s-1$ bekomen we de multipliciteit

$$\frac{1 + s(t+1) + s^2t}{1 + \frac{(s-1)^2}{s(t+1)} + \frac{s^2}{s^2t}} = \frac{st(1+t)(1+s)(1+st)}{st(1+t) + t(s-1)^2 + s(t+1)} = \frac{st(1+t)(1+s)}{s+t}.$$

Omdat deze multipliciteiten geheel moeten zijn, bekomen we hier de voorwaarden

$$s + t | s^2(1+st),$$
$$s + t | st(1+t)(1+s).$$

## 4.3 Schierzeshoeken

Hier vinden we uit (4.1) dat

$$v = \sum_{i=0}^3 k_i = 1 + s(t+1) + \frac{s^2t(t+1)}{t_2+1} + \frac{s^3t(t-t_2)}{t_2+1} = (s+1)\left(1 + st + \frac{s^2t(t-t_2)}{t_2+1}\right).$$

De Kreinvoorwaarde (4.11) wordt

$$0 \le 1 - \frac{t+1}{s^2} + \frac{t(t+1)}{s^4(1+t_2)} - \frac{t(t+1)(t-t_2)}{s^6(1+t_2)(1+t)} = 1 - \frac{t+1}{s^2} + \frac{t(t+1)}{s^4(1+t_2)} - \frac{t(t-t_2)}{s^6(1+t_2)}$$

$$= 1 - \frac{1}{s^2} - \frac{t}{s^2} + \frac{t(1+t_2)}{s^4(1+t_2)} + \frac{t(t-t_2)}{s^4(1+t_2)} - \frac{t(t-t_2)}{s^6(1+t_2)} = 1 - \frac{1}{s^2} - \frac{t}{s^2} + \frac{t}{s^4} + \frac{t(t-t_2)}{s^4(1+t_2)} - \frac{t(t-t_2)}{s^6(1+t_2)}$$
$$= \left(1 - \frac{1}{s^2}\right)\left(1 - \frac{t}{s^2} + \frac{t(t-t_2)}{s^4(1+t_2)}\right).$$

Hier is dus $s = 1$ of

$$\begin{aligned} 0 &\leq 1 - \frac{t}{s^2} + \frac{t(t-t_2)}{s^4(1+t_2)}, \\ 0 &\leq s^4(1+t_2) - s^2t(1+t_2) + t(t-t_2), \\ 0 &\leq t^2 - (s^2(1+t_2) + t_2)t + s^4(1+t_2). \end{aligned}$$

Dit kunnen we ook schrijven als

$$0 \leq t^2 - ((s^2+1)(1+t_2) - 1)t + s^4(1+t_2). \tag{4.13}$$

We vonden in de algemene resultaten al dat de adjacentiematrix van elke reguliere schierveelhoek de eigenwaarden $s(t+1)$ en $-t-1$ heeft. Uit Hoofdstuk 1 weten we dat de adjacentiematrix $d+1 = 4$ eigenwaarden heeft. We hebben dus nog twee eigenwaarden nodig. Dankzij (2.1) en $v_4(\theta) = 0$ vinden we dat deze te zoeken eigenwaarden nulpunten zijn van de volgende uitdrukking:

$$0 = v_4(\theta) = (\theta + t + 1)(\theta - s(t+1))(\theta^2 - \theta(s-1)(t_2+2) + (s^2 - s + 1)(t_2+1) - s(t+1)).$$

Naast de gevonden eigenwaarden $-t-1$ en $s(t+1)$ vinden we dus nog eigenwaarden $\alpha$ en $\beta$ die wortels zijn van $x^2 - x(s-1)(t_2+2) + (s^2-s+1)(t_2+1) - s(t+1)$. We veronderstellen $\alpha > \beta$. Om de multipliciteiten van de verschillende eigenwaarden te bepalen, hebben we uitdrukkingen nodig voor $v_i(\theta)$ met $i \in \{0,1,2,3\}$. Omdat $A_0 = I$ en $A_1 = A$ is, vinden we $v_0(\theta) = 1$ en $v_1(\theta) = \theta$. Uit (2.1) vinden we

$$v_2(\theta) = \frac{(\theta - a_1)v_1(\theta) - b_0}{c_2} = \frac{(\theta - s + 1)\theta - s(t+1)}{t_2 + 1}$$

Voor de eigenwaarden van $A_2$ krijgen we dus

$$\begin{aligned} v_2(-t-1) &= \frac{(-t-s)(-t-1) - s(t+1)}{t_2+1} = \frac{t(t+1)}{t_2+1}, \\ v_2(s(t+1)) &= \frac{(s(t+1) - s + 1)s(t+1) - s(t+1)}{t_2+1} = \frac{s^2t(t+1)}{t_2+1}, \\ v_2(\alpha) &= \frac{(\alpha - s + 1)\alpha - s(t+1)}{t_2+1} = \frac{\alpha^2 + (-s+1)\alpha - s(t+1)}{t_2+1} \\ &= \frac{s(t+1) - (s^2-s+1)(t_2+1) + \alpha(s-1)(t_2+2) + (-s+1)\alpha - s(t+1)}{t_2+1} \\ &= \alpha(s-1) - (s^2 - s + 1), \\ v_2(\beta) &= \beta(s-1) - (s^2 - s + 1). \end{aligned}$$

Uit (2.1) met $i = 3$ vinden we

$$v_3(\theta) = \frac{(\theta - a_2)v_2(\theta) - b_1\theta}{c_3} = \frac{(\theta - (s-1)(t_2+1))v_2(\theta) - st\theta}{t+1}$$

Voor de eigenwaarden van $A_3$ vinden we zo

$$\begin{aligned} v_3(-t-1) &= \frac{(-t-1-(s-1)(t_2+1))\frac{t(t+1)}{t_2+1} + st(t+1)}{t+1} = \frac{t(t_2-t)}{t_2+1}, \\ v_3(s(t+1)) &= \frac{(s(t+1) - (s-1)(t_2+1))\frac{s^2t(t+1)}{t_2+1} - s^2t(t+1)}{t+1} = \frac{s^3t(t-t_2)}{t_2+1}, \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
v_3(\alpha) &= \frac{(\alpha-(s-1)(t_2+1))(\alpha(s-1)-(s^2-s+1))-st\alpha}{t+1} \\
&= \frac{(s-1)\alpha^2-(s^2-s+1+(s-1)^2(t_2+1)+st)\alpha+(s-1)(s^2-s+1)(t_2+1)}{t+1} \\
&= \frac{(s-1)(s(t+1)-(s^2-s+1)(t_2+1)+\alpha(s-1)(t_2+2))}{t+1} \\
&+ \frac{-(s^2-s+1+(s-1)^2(t_2+1)+st)\alpha+(s-1)(s^2-s+1)(t_2+1)}{t+1} \\
&= -s\alpha+s(s-1), \\
v_3(\beta) &= -s\beta+s(s-1).
\end{aligned}
$$

De grootte van de eigenruimte overeenkomstig met eigenwaarde $-t-1$ is dan

$$
\begin{aligned}
f(-t-1) &= \frac{v}{\sum_{i=0}^{3} k_i u_i(-t-1)^2} = \frac{v}{\sum_{i=0}^{3} \frac{v_i(-t-1)^2}{k_i}} = \frac{v}{1+\frac{t+1}{s}+\frac{t(t+1)}{s^2(t_2+1)}+\frac{t(t-t_2)}{s^3(t_2+1)}} \\
&= \frac{vs^3(t_2+1)}{s^3(t_2+1)+s^2(t+1)(t_2+1)+st(t+1)+t(t-t_2)} \\
&= \frac{(s+1)\left(1+st+\frac{s^2t(t-t_2)}{t_2+1}\right)s^3(t_2+1)}{(s+1)((t_2+1)s^2+(t_2+1)st+t(t-t_2))} \\
&= \frac{(1+t_2+st(1+t_2)+s^2t(t-t_2))s^3}{(t_2+1)s^2+(t_2+1)st+t(t-t_2)}.
\end{aligned} \tag{4.14}
$$

De Kreinvoorwaarde $q_{113} \geq 0$ wordt hier met behulp van (4.10) voor $s > 1$

$$
\begin{aligned}
&0 \leq 1+\frac{\beta}{s^2}+\frac{(s-1)\beta-(s^2-s+1)}{s^4}+\frac{-s\beta+s(s-1)}{s^6}, \\
&0 \leq s(s-1)(s+1)^2(s^2+\beta-s+1).
\end{aligned}
$$

Volgens dezelfde berekeningen wordt de Kreinvoorwaarde $q_{112} \geq 0$ hier

$$
0 \leq s(s-1)(s+1)^2(s^2+\alpha-s+1).
$$

Hieruit volgt nu dat

$$
\begin{aligned}
0 &\leq (s^2+\alpha-s+1)(s^2+\beta-s+1) = \alpha\beta+(\alpha+\beta)(s^2-s+1)+(s^2-s+1)^2, \\
0 &\leq (s^2-s+1)(t_2+1)-s(t+1)+(s-1)(t_2+2)(s^2-s+1)+(s^2-s+1)^2, \\
s(t+1) &\leq (s^2-s+1)(t_2+1+(s-1)(t_2+2)+s^2-s+1), \\
s(t+1) &\leq (s^2-s+1)(s(t_2+2)+s^2-s), \\
t+1 &\leq (s^2-s+1)(t_2+2+s-1), \\
t+1 &\leq (s^2-s+1)(t_2+1+s).
\end{aligned}
$$

Deze ongelijkheid kunnen we ook schrijven als de Mathongrens

$$
t \leq s^3+t_2(s^2-s+1). \tag{4.15}
$$

## 4.4 Schierachthoeken

De Kreinvoorwaarde (4.11) wordt hier

$$
\begin{aligned}
&0 \leq 1-\frac{t+1}{s^2}+\frac{t(t+1)}{s^4(1+t_2)}-\frac{t(t+1)(t-t_2)}{s^6(1+t_2)(1+t_3)}+\frac{t(t+1)(t-t_2)(t-t_3)}{s^8(1+t_2)(1+t_3)(1+t)}, \\
&0 \leq 1-\frac{1}{s^2}-\frac{t}{s^2}+\frac{t}{s^4}+\frac{t(t-t_2)}{s^4(1+t_2)}-\frac{t(t-t_2)}{s^6(1+t_2)}-\frac{t(t-t_3)(t-t_2)}{s^6(1+t_2)(1+t_3)}+\frac{t(t-t_2)(t-t_3)}{s^8(1+t_2)(1+t_3)},
\end{aligned}
$$

$$0 \leq \left(1 - \frac{1}{s^2}\right)\left(1 - \frac{t}{s^2} + \frac{t(t-t_2)}{s^4(1+t_2)} - \frac{t(t-t_3)(t-t_2)}{s^6(1+t_2)(1+t_3)}\right).$$

We vinden dus ofwel $s = 1$ ofwel

$$\begin{aligned}
&0 \leq 1 - \frac{t}{s^2} + \frac{t(t-t_2)}{s^4(1+t_2)} - \frac{t(t-t_3)(t-t_2)}{s^6(1+t_2)(1+t_3)},\\
&0 \leq s^6(1+t_2)(1+t_3) - s^4 t(1+t_2)(1+t_3) + s^2 t(t-t_2)(1+t_3) - t(t-t_3)(t-t_2),\\
&0 \leq s^6(1+t_2)(1+t_3) - s^4 t(1+t_2)(1+t_3) + s^2 t^2(1+t_3) - s^2 tt_2(1+t_3) - t^3 + t^2(t_2+t_3) - tt_2t_3,\\
&0 \geq t^3 - (s^2(1+t_3)+t_2+t_3)t^2 + (s^4(1+t_2)(1+t_3) + s^2t_2(1+t_3) + t_2t_3)t - s^6(1+t_2)(1+t_3) := f(t).
\end{aligned}$$

We zullen nu bewijzen dat in dit laatste geval (dus als $s \geq 2$) geldt dat

$$t \leq s^2(t_3 - t_2 + 1) + t_3. \tag{4.16}$$

We veronderstellen dat $t > s^2(t_3 - t_2 + 1) + t_3$. We bewijzen eerst dat de functie $f$ stijgend is voor $x > s^2(t_3 - t_2 + 1) + t_3$. Daarna bewijzen we dat $f(s^2(t_3 - t_2 + 1) + t_3) \geq 0$. Hieruit volgt dan een strijdigheid, want uit het stijgend zijn van $f$ volgt dan dat onder de veronderstelling $t > s^2(t_3 - t_2 + 1) + t_3$ geldt dat $f(t) \geq f(t > s^2(t_3 - t_2 + 1) + t_3) \geq 0$.

**Lemma 4.18.** *De functie*

$$f(x) = x^3 - (s^2(1+t_3)+t_2+t_3)x^2 + (s^4(1+t_2)(1+t_3) + s^2t_2(1+t_3) + t_2t_3)x - s^6(1+t_2)(1+t_3)$$

*is een stijgende functie voor* $x \geq t > s^2(t_3 - t_2 + 1) + t_3$.

**Bewijs.** Het stuk $(s^4(1+t_2)(1+t_3) + s^2t_2(1+t_3) + t_2t_3)x - s^6(1+t_2)(1+t_3)$ is sowieso stijgend als een lineaire functie met positieve coëfficiënt bij $x$. Als we het stuk $x^3 - (s^2(1+t_3)+t_2+t_3)x^2$ afleiden, bekomen we de uitdrukking

$$3x^2 - 2(s^2(1+t_3)+t_2+t_3)x.$$

Dit is een dalparabool met nulpunten 0 en $\frac{2}{3}(s^2(1+t_3)+t_2+t_3)$. Het enige wat we nog moeten bewijzen is de volgende ongelijkheid:

$$\begin{aligned}
\frac{2}{3}(s^2(1+t_3)+t_2+t_3) &\leq s^2(t_3 - t_2 + 1) + t_3\\
0 &\leq s^2\left(\frac{t_3}{3} - t_2 + \frac{1}{3}\right) + \frac{t_3}{3} - \frac{2t_2}{3}.
\end{aligned}$$

Als $t_2 = 0$, dan geldt deze laatste ongelijkheid altijd. We veronderstellen in het vervolg van het bewijs dus dat $t_2 \geq 1$. Uit Lemma 4.12 volgt dat $t_3 \geq t_2(t_2+1)$. We vinden bijgevolg dat

$$\begin{aligned}
s^2\left(\frac{t_3}{3} - t_2 + \frac{1}{3}\right) + \frac{t_3}{3} - \frac{2t_2}{3} &\geq \frac{s^2(t_2^2 + t_2 - 3t_2 + 1) + t_2^2 + t_2 - 2t_2}{3}\\
&\geq \frac{s^2(t_2^2 - 2t_2 + 1) + t_2^2 - t_2}{3}\\
&\geq \frac{s^2(t_2-1)^2 + t_2(t_2-1)}{3} \geq 0.
\end{aligned}$$

De laatste ongelijkheid volgt hier uit het feit dat $t_2 \geq 1$. Hiermee is het lemma bewezen. □

**Lemma 4.19.** *Er geldt dat* $f(s^2(t_3 - t_2 + 1) + t_3) \geq 0$.

**Bewijs.** De ongelijkheid in het lemma is equivalent met

$$\begin{aligned}
0 \leq &-s^6t_2t_3 - s^6t_2 - s^6t_3 - s^6 - (s^2t_2 - s^2t_3 - s^2 - t_3)^3 - (s^2t_2 - s^2t_3 - s^2 - t_3)^2(s^2t_3 + s^2 + t_2 + t_3)\\
&- (s^4t_2t_3 + s^4t_2 + s^4t_3 + s^4 + s^2t_2t_3 + s^2t_2 + t_2t_3)(s^2t_2 - s^2t_3 - s^2 - t_3),\\
0 \leq &(-t_2^3 + t_2^2t_3 + t_2^2 - 2t_2t_3 + t_3^2 - 2t_2 + t_3)s^6 + (-t_2^3 + 3t_2^2t_3 - t_2t_3^2 + t_2^2 - t_2t_3 + t_3^2 + t_3)s^4\\
&+ (t_2^2t_3 - t_2t_3^2)s^2,
\end{aligned} \tag{4.17}$$

$$
\begin{aligned}
0 \leq & t_3^2 s^4(s^2-t_2) + t_3^2 s^2(s^2-t_2) + s^4(t_2^2 t_3 + t_2^2(t_3-t_2) + t_2 t_3(t_2-1)) + (t_2^2+t_3)s^4 + t_2^2 t_3 s^2 \\
& + s^6(t_3(t_2^2-2t_2+1) - t_2(t_2^2-t_2+2)).
\end{aligned}
$$

De eerste twee termen zijn altijd positief dankzij de Kreinvoorwaarde in schiervierhoeken. De derde term wordt 0 als $t_2 = 0$ en is positief als $t_2 \geq 1$ (dankzij de ongelijkheid $t_3 \geq t_2(t_2+1)$ verkregen uit Lemma 4.12). De vierde en vijfde term zijn altijd positief. We moeten nu enkel nog bewijzen dat de laatste term positief is, dus dat $t_3(t_2^2 - 2t_2 + 1) - t_2(t_2^2 - t_2 + 2) \geq 0$. Als $t_2 = 0$ vallen alle negatieve stukken hierin weg. We mogen dus aannemen dat $t_2 \geq 1$. Dankzij $t_3 \geq t_2(t_2+1)$ krijgen we

$$
t_3(t_2^2-2t_2+1) - t_2(t_2^2-t_2+2) \geq t_2((t_2+1)(t_2^2-2t_2+1) - t_2^2 + t_2 - 2) = t_2(t_2^2(t_2-2)-1).
$$

Dit is altijd positief als $t_2 \geq 3$. Er rest ons nu enkel nog de gevallen $t_2 = 2$ en $t_2 = 1$ te bekijken.

Als $t_2 = 1$ wordt (4.17) de volgende ongelijkheid:

$$
\begin{aligned}
&0 \leq (s^4 t_3^2 - 2s^4 + 3s^2 t_3 - t_3^2 + t_3)s^2, \\
&0 \leq s^4 t_3^2 - 2s^4 + 3s^2 t_3 - t_3^2 + t_3.
\end{aligned}
$$

Omdat we mogen veronderstellen dat $s \geq 2$ en $t_3 \geq 2$, krijgen we

$$
\begin{aligned}
s^4 t_3^2 - 2s^4 + 3s^2 t_3 - t_3^2 + t_3 &= s^4\left(t_3^2 - 2 - \frac{t_3^2}{s^4}\right) + 3s^2 t_3 + t_3 \\
&\geq s^4\left(t_3^2 - 2 - \frac{t_3^2}{16}\right) + 3s^2 t_3 + t_3 \\
&\geq s^4\left(4\frac{15}{16} - 2\right) + 3s^2 t_3 + t_3 \geq 0.
\end{aligned}
$$

Als $t_2 = 2$ wordt (4.17) de ongelijkheid

$$
(s^4 t_3^2 + s^4 t_3 - 8s^4 - s^2 t_3^2 + 11 s^2 t_3 - 4s^2 - 2t_3^2 + 4t_3)s^2 \geq 0.
$$

Dankzij $t_3 \geq t_2(t_2+1) = 6$ en $s \geq 2$ krijgen we echter

$$
\begin{aligned}
&s^4 t_3^2 + s^4 t_3 - 8s^4 - s^2 t_3^2 + 11 s^2 t_3 - 4s^2 - 2t_3^2 + 4t_3 \\
&= s^4\left(t_3^2 + t_3 - 8 - \frac{t_3^2}{s^2} - \frac{2t_3^2}{s^4}\right) + s^4(11t_3 - 4) + 4t_3 \\
&\geq s^4\left(\frac{36(s^4 - s^2 - 2)}{s^4} - 2\right) + 62s^4 + 24 \\
&= \frac{36(s^4 - s^2 - 2)}{s^4} + 60s^4 + 24 \geq 0.
\end{aligned}
$$

Hierdoor klopt de ongelijkheid (4.17) en is het lemma bewezen. □

# 5 Het geval $1 + t_3 = (1+t_2)(1+st_2)$

We willen bewijzen dat een reguliere schierzeshoek die voldoet aan $s > 1$, $t_2 > 1$ en $1 + t_3 = (1+t_2)(1+st_2)$, de unieke schierzeshoek is met parameters $(s, t_2, t_3) = (2, 2, 14)$.

**Lemma 4.20.** *Als een reguliere schierzeshoek voldoet aan $s > 1$, $t_2 > 1$, $1 + t_3 = (1+t_2)(1+st_2)$ en $s = t_2$, dan is dit de unieke schierzeshoek met parameters $(s, t_2, t_3) = (2, 2, 14)$.*

**Bewijs.** Onder bovenstaande voorwaarden wordt $t_3 = (1+t_2)(1+st_2) - 1 = (1+s)(1+s^2) - 1 = s(s^2+s+1)$. We zien dat (4.14) het volgende wordt:

$$
f(-t-1) = \frac{(1 + t_2 + st(1+t_2) + s^2 t(t-t_2))s^3}{(t_2+1)s^2 + (t_2+1)st + t(t-t_2)},
$$

$$
\begin{aligned}
f(-t-1) &= \frac{(1+s+st(1+s)+s^2t(t-s))s^3}{(s+1)s^2+(s+1)st+t(t-s)} \\
&= \frac{(1+s+s^2(s^2+s+1)(1+s)+s^3(s^2+s+1)(s(s^2+s+1)-s))s^3}{(s+1)s^2+s^2(s+1)(s^2+s+1)+s(s^2+s+1)(s(s^2+s+1)-s)} \\
&= \frac{s^1 1+2s^1 0+2s^9+2s^8+2s^7+2s^6+s^5+s^4+s^3}{s^6+3s^5+4s^4+4s^3+2s^2} \\
&= \frac{s^9+2s^8+2s^7+2s^6+2s^5+2s^4+s^3+s^2+s}{s^4+3s^3+4s^2+4s+2} \\
&= \frac{s(s+1)(s^7+s^6+s^5+s^4+s^3+s^2+1)}{(s+1)(s^3+2s^2+2s+2)} \\
&= \frac{s(s^7+s^6+s^5+s^4+s^3+s^2+1)}{s^3+2s^2+2s+2} \\
&= s^5-s^4+s^3-s^2+3s-5+\frac{6s^2+5s+10}{s^3+2s^2+2s+2}.
\end{aligned}
$$

De breuk $\frac{6s^2+5s+10}{s^3+2s^2+2s+2}$ moet dus een geheel getal zijn. Dit is enkel zo voor $s \in \{-2,-1,0,1,2\}$. Door de voorwaarden in de stelling moet dus $s=2$. Hiermee wordt $t_3 = s^3+s^2+s = 14$. In [10] wordt bewezen dat deze schierzeshoek uniek is. $\square$

We keren nu terug naar het algemene geval en we nemen aan dat $s \neq t_2$. We zullen bewijzen dat zowel $s \leq t_2$ als $s \geq t_2$. We kiezen eerst een vast quad $Q$ in het hex. Als we een punt $x$ in $N_{2,O}(Q)$ kiezen, dan weten we dat het aantal rechten door $x$ die een punt van $N_{1,C}(Q)$ bevatten gelijk is aan $(1+t_2)(1+st_2)$. De ovoide bepaald door $x$ bevat immers $1+st_2$ punten, en per punt van die ovoide vinden we $1+t_2$ rechten door $x$. Deze rechten bevatten sowieso punten van $N_{1,C}$, want $N_{1,O}$ is ledig. Het aantal rechten door $x$ in $N_{2,O}$ is bijgevolg $1+t_3-(1+t_2)(1+st_2)=0$. Als nu voor een ander quad $Q'$ in de schierzeshoek geldt dat $Q \bigcap Q'$ ledig is, dan is $Q \bigcap \Gamma_1(Q')$ een deelverzameling van $Q$ die alle rechten van $Q$ raakt. Stel immers dat er een rechte in $Q$ is die niet geraakt wordt, dan zou deze rechte in $\Gamma_2(Q')$ moeten liggen. Omdat echter $N_{2,C}(Q')$ ledig is, ligt deze rechte in $N_{2,O}(Q')$, wat onmogelijk is. Als een rechte twee punten bevat van $Q \bigcap \Gamma_1(Q')$, dan ligt de volledige rechte in deze verzameling. Inderdaad, als een rechte twee punten bevat van $Q$, dan ligt de volledige rechte in $Q$ omdat $Q$ geodetisch gesloten is. Als deze rechte daarenboven ook twee punten bevat van $\Gamma_1(Q')$, dan bevat ze ofwel een punt van $Q'$, ofwel is ze parallel aan een rechte van $Q'$. Het eerste geval zou betekenen dat $Q \bigcap Q'$ geen ledige verzameling is, strijdig met onze aannames. Enkel het tweede geval blijft dus over. Als we nu aannemen dat er een rechte $L$ bevat is in de verzameling $Q \bigcap \Gamma_1(Q')$, dan vinden we voor elk ander punt van deze verzameling een buur op $L$. Anders zouden er immers twee punten in $Q$ zijn op afstand 3 van elkaar. De rechte die een punt van $Q \bigcap \Gamma_1(Q')$ en zijn buur op $L$ bevat moet sowieso volledig in $Q \bigcap \Gamma_1(Q')$ liggen. Op deze manier zien we dat $Q \bigcap \Gamma_1(Q')$ een deelvierhoek is van $Q$. In Stelling 1.30 van [9] vinden we hierover het volgende resultaat.

**Lemma 4.21.** *Als $Q$ een veralgemeende vierhoek is met orde $(s, t_2)$, en $Q'$ is een deelvierhoek van $Q$ met orde $(s, t_2')$, dan is $t_2 = t_2'$ of $t_2' \leq \frac{t_2}{s}$, met gelijkheid enkel als elke rechte van $Q$ een punt bevat uit $Q'$.*

**Bewijs.** We stellen dat $t_2 \neq t_2'$ en we kiezen een punt $x \in Q \backslash Q'$. De punten van $Q'$ die collineair zijn met $x$ kunnen dan niet collineair zijn met elkaar. Elke rechte van $Q'$ bevat een punt collineair met $x$, omdat we anders punten in $Q' \subset Q$ vinden op afstand 3 van $x$. De punten van $Q'$ collineair met $x$ vormen dus een ovoïde in $Q'$. We vinden dus dat er van de $1+t_2$ rechten door $x$ er $1+st_2'$ collineair zijn met een punt uit $Q'$. Er volgt dat $t_2' \leq \frac{t_2}{s}$. Bij gelijkheid bevat elke rechte door $x$ een punt uit $Q'$. Omdat we $x$ willekeurig gekozen hadden in $Q \backslash Q'$ volgt nu het lemma. $\square$

De mogelijkheden voor $Q \bigcap \Gamma_1(Q')$ zijn dus

**(A)** een ovoide,

**(B)** een punt en al zijn buren,

**(C)** een deelvierhoek $GQ(s, \frac{t_2}{s})$,

**(D)** Q.

Als $Q \bigcap Q'$ niet ledig is, dan is dit een geodetisch gesloten deelverzameling $Q$ als doorsnede van twee geodetisch gesloten verzamelingen. De mogelijkheden zijn dan

**(E)** $|Q \bigcap Q'| = 1$,

**(F)** $Q \bigcap Q'$ is een rechte,

**(G)** $Q = Q'$.

Door (4.15) vinden we

$$\begin{aligned} s^3 + t_2(s^2 - s + 1) &\geq st_2 + st_2^2 + t_2, \\ s^3 + s^2 t_2 - 2st_2 - st_2^2 &\geq 0, \\ 1 + \frac{t_2}{s} - 2\frac{t_2}{s^2} - \frac{t_2^2}{s^2} &\geq 0, \\ 1 + \frac{t_2}{s} - \frac{t_2^2}{s^2} &> 0, \\ \frac{t_2}{s} < \frac{1+\sqrt{5}}{2} &< 2. \end{aligned}$$

Doordat we al aangenomen hadden dat $s \neq t_2$, is mogelijkheid (C) hier uitgesloten.

**Lemma 4.22.** *Als een reguliere schierzeshoek voldoet aan $s > 1$, $t_2 > 1$ en $1 + t_3 = (1 + t_2)(1 + st_2)$, dan is $s \geq t_2^2$.*

**Bewijs.** We kiezen een punt $x$ in $\Gamma_2(Q)$. Steunend op het feit dat twee snijdende rechten een quad bepalen, is het aantal quads door dit punt gelijk aan

$$\frac{t_3(t_3+1)}{t_2(t_2+1)} = \frac{(st_2^2 + st_2 + t_2)(t_2+1)(1+st_2)}{t_2(t_2+1)} = (st_2 + s + 1)(1 + st_2).$$

Aangezien door twee punten op afstand 2 slechts in één quad kunnen bevat zijn, snijden slechts $1 + st_2$ van deze quads $Q$. De enige quads die punten bevatten uit $N_{2,O}(Q)$ zijn quads van type (A),(B) en (E). We hebben immers al type (C) uitgesloten, en bij type (D) vinden we voor elk punt van $Q'$ een buur in $Q$. Als er immers een punt $x$ van $Q'$ zou zijn die geen buur in $Q$ heeft, dan moet $x$ in $N_{2,O}(Q)$ liggen. We nemen een punt $y'$ in $Q$ met $d(y', x) = 2$ en een gemeenschappelijke buur $y \in Q'$ van $y'$ en $x$. Door een rechte $L$ van $Q$ door $y'$ af te beelden op de punten van $Q'$ die een buur hebben op $L$ vinden we een injectie tussen de rechten van $Q$ door $y'$ en de rechten van $Q'$ door $y$. De injectiviteit volgt uit het geodetisch gesloten zijn van $Q$. Op deze manier bereiken we echter de rechte $yx$ niet, dus zijn er dus minstens $t_2 + 2$ rechten in $Q'$ door $y$, strijdig met de definitie van $t_2$.

Bij type (F) ligt een punt $x$ van $Q'$ maximum op afstand 1 van elke rechte van $Q'$, dus ook maximum op afstand 1 van $Q$. Bij type (G) ligt elk punt van $Q'$ in $Q$. Schrijven we $n_T$ voor het aantal quads door $x$ van type (T) met (T) gelijk aan (A),(B) of (E), dan verkrijgen we al de volgende vergelijkingen:

$$\begin{aligned} n_A + n_B + n_E &= (1 + s + st_2)(1 + st_2), \\ n_E &= 1 + st_2. \end{aligned}$$

Als we nu paren $(l, Q')$ tellen met $l \subset Q' \bigcap \Gamma_1(Q)$ en $x \in Q'$, dan zien we dat er geen zulke $l$ bestaan voor quads van type (A). Zo een rechte zou immers parallel moeten zijn aan een rechte in $Q \bigcap \Gamma_1(Q')$, wat een ovoïde is. Voor quads van type (B) was $Q \bigcap \Gamma_1(Q')$ gelijk aan alle rechten in $Q$ door een punt $z$. Voor zo'n rechte $m$ in $Q \bigcap \Gamma_1(Q')$ vinden we dat alle punten op afstand 1 van $Q'$ liggen, wat enkel kan als er in $Q'$ een rechte ligt parallel met $m$. Herhalen we dit voor elke rechte $m$ door $z$, dan vinden we $1 + t_2$ rechten door $z'$ in $Q'$ die elk alleen maar punten van $\Gamma_1(Q)$ bevatten. Er zijn echter maar $1 + t_2$ rechten door $z'$ in $Q'$. We vinden dus per rechte $m$ door $z$ exact één rechte $m'$ door $z'$ in $Q'$ parallel aan $m$. Voor quads van type (E) vinden we dat $Q' \bigcap \Gamma_1(Q)$ bestaat uit alle rechten in $Q'$ door het punt $Q \bigcap Q'$ zonder dit punt zelf. Er liggen dus geen volledige rechten in $Q' \bigcap \Gamma_1(Q)$. Als we nu dus eerst quads bekijken, vinden we dus $n_B$ mogelijke quads. Per quad vinden $1+t_2$ rechten in $Q\bigcap\Gamma_1(Q')$, die elk evenwijdig zijn aan exact één rechte in $Q'\bigcap\Gamma_1(Q)$. We vinden dus $(1+t_2)n_B$ zulke paren. Anderzijds kunnen we eerst kijken naar de punten in de ovoïde van $Q$ bepaald door de punten in $Q\bigcap\Gamma_2(x)$ (zo zijn er $1+st_2$). Voor elk punt $y$ van deze ovoïde vinden we $1+t_2$ punten $z$ op afstand 1 van zowel $x$ als $y$. Voor elke rechte $l$ in $Q$ door $y$ kunnen we nu het quad voortgebracht door $l$ en $zy$ bekijken. In zo'n quad vinden we $t_2$ rechten door $z$ die geen punten van $Q$ bevatten, en die dus in $\Gamma_1(Q)$ liggen. We vinden in totaal dus $t_2(t_2+1)$ rechten door $z$ in $\Gamma_1(Q)$. Voor elk van deze rechte vinden we exact één quad door $x$ dat deze rechte bevat, namelijk het quad voortgebracht door deze rechte en de rechte $zx$. Zo'n quad $Q'$ bevat een rechte in $\Gamma_1(Q)$, en kan bijgevolg niet van type (A) zijn. Het bevat ook geen punten van $Q$, dus het kan niet van type (E) zijn. De enige mogelijkheid die nog overblijft is dus dat zo'n quad $Q'$ van type (B) is. We vinden

$$(1+t_2)n_B = t_2(1+t_2)^2(1+st_2).$$

Hieruit volgt nu

$$\begin{aligned}n_A &= (1+s+st_2)(1+st_2)-(1+st_2)-t_2(1+t_2)(1+st_2) = (1+st_2)(1+s+st_2-1-t_2(1+t_2))\\ &= (1+st_2)(s+st_2-t_2(1+t_2)) = (1+st_2)(1+t_2)(s-t_2).\end{aligned}$$

Dit wil zeggen dat $s\geq t_2$. □

**Lemma 4.23.** *Als een reguliere schierzeshoek voldoet aan $s>1$, $t_2>1$ en $1+t_3=(1+t_2)(1+st_2)$, dan is $s\leq t_2^2$.*

**Bewijs.** Voor het gemak nemen we de notaties uit het bewijs van het vorige lemma over. Stellen we daarnaast $N_T$ gelijk aan het totaal aantal quads van type (T) met (T) gelijk aan (A),(B),(D),(E),(F) of (G), dan kunnen we eerst $N_A$ bepalen door het aantal paren $(x,Q')$ te tellen met $x\in Q'$, $x\in\Gamma_2(Q)$ en $Q'$ van type (A). Enerzijds vinden we dat dit aantal gelijk is aan $|\Gamma_2(Q)|n_A$. Anderzijds is dit aantal gelijk aan $s(1+st_2)N_A$. Voor een quad van type A vinden we immers een ovoïde in $Q$. Voor elk punt $y$ van deze ovoïde vinden we een punt in $Q'$ op afstand 1 van $y$. Alle andere punten van $Q'$ liggen op afstand 2 van $Q$. Zo vinden we $(1+s)(1+st_2)-(1+st_2)=s(1+st_2)$ punten $x$. Met behulp van Lemma 4.12 vinden we

$$\begin{aligned}N_A &= \frac{|\Gamma_2(Q)|n_A}{s(1+st_2)} = \frac{s^2(s+1)(t_3-t_2(1+t_2))(t_3-t_2)(s-t_2)(1+t_2)(1+st_2)}{s(1+st_2)(1+t_2)}\\ &= s(s+1)(s-t_2)(st_2^2+st_2-t_2^2)(st_2^2+st_2)\\ &= s^2t_2^2(s+1)(s-t_2)(st_2+s-t_2)(1+t_2).\end{aligned}$$

We kunnen $N_B$ analoog berekenen. We vinden in een quad $Q'$ van type (B) $s^2t_2$ punten op afstand 2 van $Q$. De punten van $Q'$ kunnen immers op afstand 0, 1 of 2 liggen van $Q$, aangezien we in een hex zijn, en er voor een punt $z$ op afstand 3 van $Q$ punten zouden zijn in $Q$ die op afstand meer dan 3 van $z$ zouden liggen. Er zijn ook geen punten van $Q'$ op afstand 0 van $Q$, want $Q'$ is van type (B). Van de $(1+s)(1+st_2)$ punten van $Q'$ liggen er $s(t_2+1)+1$ punten op afstand 1 van $Q$, dus $(1+s)(1+st_2)-(1+s(t_2+1))=s^2t_2$ punten van $Q'$ liggen op afstand 2 van $Q$. We krijgen

$$\begin{aligned}N_B &= \frac{|\Gamma_2(Q)|n_B}{s^2t_2} = \frac{s^2(s+1)(t_3-t_2(1+t_2))(t_3-t_2)t_2(1+t_2)(1+st_2)}{s^2t_2(1+t_2)}\\ &= (s+1)(t_3-t_2(1+t_2))(t_3-t_2)(1+st_2) = (s+1)(st_2+st_2^2-t_2^2)(st_2+st_2^2)(1+st_2)\\ &= st_2^2(s+1)(st_2+s-t_2)(t_2+1)(1+st_2).\end{aligned}$$

Als we nu snijdende rechtenparen $(l,l')$ in $\Gamma_1(Q)$ tellen zodanig dat het quad voortgebracht door $l$ en $l$ disjunct is van $Q$, dan vinden we enerzijds $N_Bt_2(t_2+1)+N_D(1+s)(1+st_2)t_2(1+t_2)$ zulke paren. Anderzijds vinden we $|\Gamma_1(Q)|$ punten $z$ in $\Gamma_1(Q)$. Nemen we nu de projectie $z'$ van zo'n punt $z$, dan vinden we $t_2+1$ rechten $m$ door $z'$ in $Q$, en voor elk van deze rechten vinden we een quad voortgebracht door $m$ en $zz'$. In elk van deze quads vinden we $t_2$ rechten door $z$ die geen punten bevatten van $Q$. We hebben dus $t_2(t_2+1)$ rechten $l$ door $z$ in $\Gamma_1(Q)$. Om nu het aantal mogelijkheden voor de tweede rechte van het rechtenpaar te bepalen, moeten we de rechten door $z$ uitsluiten die samen met $l$ een quad voortbrengen dat punten bevat van $Q$. Er is maar één zo'n quad, namelijk het quad voortgebracht door $m$ en $zz'$, waardoor we $t_2 - 1$ rechten verschillend van $l$ vinden die samen met $l$ een quad voortbrengen dat punten bevat van $Q$. Er blijven dus nog $t_2(t_2+1) - 1 - t_2 + 1 = t_2^2$ mogelijke rechten $l'$ over. We krijgen dus

$$N_B t_2(t_2+1) + N_D(1+s)(1+st_2)t_2(1+t_2) = |\Gamma_1(Q)|(1+t_2)t_2^3.$$

Uit Lemma 4.11 en het feit dat alle punten van $\Gamma_1(Q)$ klassiek zijn ten opzichte van $Q$ vinden we dat $|\Gamma_1(Q)| = (1+s)(1+st_2)s(t-t_2) = st_2(1+s)(1+st_2)s(t_2+1)$. Door nu de waarde van $N_B$ te vervangen in de bovenstaande gelijkheid vinden we

$$\begin{aligned} st_2(1+s)(1+st_2)s(t_2+1)(1+t_2)t_2^3 =& st_2^2(s+1)(st_2+s-t_2)(t_2+1)(1+st_2)t_2(t_2+1) \\ &+ N_D(1+s)(1+st_2)t_2(1+t_2), \\ s^2t_2^3(t_2+1) = & st_2^2(st_2+s-t_2)(t_2+1) + N_D, \\ N_D =& st_2^2(1+t_2)(st_2 - (st_2+s-t_2)), \\ N_D =& st_2^2(1+t_2)(t_2-s). \end{aligned}$$

Omdat $N_D \geq 0$ is, vinden we dat $s \leq t_2^2$, wat het gestelde bewijst. □

Stelling 4 uit [4] zegt ons dat er deelschierzeshoeken bestaan in $X$ als we twee punten vinden op afstand 3 van elkaar. Indien de diameter van de schierveelhoek $X$ dus groter is dan 3 vinden we zeker deelschierzeshoeken. Deel (h) van [4] zegt ons ook dat er geen schierachthoeken bestaan met parameters $(s, t_2, t_3, t_4) = (2, 2, 14, t_4)$. Bijgevolg kan de schierzeshoek met parameters $(s, t_2, t_3) = (2, 2, 14)$ nooit een deelschierzeshoek zijn van een grotere schierveelhoek. We kunnen bijgevolg voor niet-klassieke schierveelhoeken met diameter $d > 3$ in het vervolg altijd aannemen dat $1 + t_3 > (1 + t_2)(1 + st_2)$.

# Hoofdstuk 5

# Bestaansvoorwaarden voor schierachthoeken

De stelling die we hier willen bewijzen is

**Stelling 5.1.** *Voor een reguliere schierachthoek* $(X, L)$ *met parameters* $(s, t_2, t_3, t_4)$ *geldt altijd één van de volgende voorwaarden:*

1. $s = 1$,
2. $t_2 = 0$,
3. $t_2 = 1$ *of*
4. $t_3 = t_2(t_2 + 1)$ *en* $t_4 = t_3(t_3 + 1)$, *dus* $X$ *is klassiek.*

## 1 Voorwaarden voor $R$ en $s$

In Lemma 4.15 vonden we al een sterke voorwaarde op $R$. We hebben ook een sterkere voorwaarde nodig op de parameters van een veralgemeende vierhoek dan de voorwaarde $t \leq s^2$ uit het vorige hoofdstuk.

**Lemma 5.2.** *Voor een veralgemeende vierhoek met parameters* $(s, t_2)$ *met* $t_2 > 1$ *geldt dat* $s = t_2^2$, $s = t_2^2 - t_2$, $s = t_2^2 - t_2 - 1$ *of* $s \leq t_2(t_2 - 2)$.

**Bewijs.** Als we bij de adjacentiematrix van een veralgemeende vierhoek met deze parameters kijken naar de eigenwaarde $-t_2 - 1$, dan weten we dankzij (4.12) dat de multipliciteit hiervan gelijk is aan

$$f(-t_2 - 1) = \frac{s^2(st_2 + 1)}{s + t_2}.$$

Hieruit volgt dus dat $s + t_2$ een deler is van $s^2(st_2 + 1)$, dus ook dat

$$s + t_2 | s^2(st_2 + 1) + (s + t_2)(-s^2t_2 + st_2^2 - s - t_2^3 + t_2) = -t_2^4 + t_2^2,$$

dus $s + t_2$ deelt $t_2^2(t_2^2 - 1)$. Als nu $s = t_2(t_2 - 2) + l$, dan is $t_2^2 = (s + t_2) + (t_2 - l)$, dus wordt de vorige deelbaarheidsvoorwaarde dat $s + t_2$ een deler is van $(t_2 - l)(t_2 - l - 1)$. Als $0 < l < 2t_2$, $l \neq t_2, t_2 - 1$, dan volgt uit de definitie van $l$ dat $t_2(t_2 - 2) < s < t_2^2$. Hiervoor geldt dat

$$\begin{aligned} s + t_2 = t_2^2 - 2t_2 + l + t_2 = t_2^2 - t_2 + l \leq (t_2 - l)(t_2 - l - 1) &= t_2^2 - 2lt_2 - t_2 + l^2 + l, \\ 0 &\leq -2lt_2 + l^2 = l(l - 2t_2), \\ 2t_2 &\leq l. \end{aligned}$$

Dit is strijdig met de veronderstelling $0 < l < 2t_2$. Het geheel getal $l$ moet dus ofwel negatief zijn, ofwel een element zijn van de verzameling $\{t_2 - 1, t_2, 2t_2\}$. In de gevallen $l = t_2, t_2 - 1$ zouden we met deze redenering beginnen met de voorwaarde dat $s + t_2$ een deler is van 0 wat altijd geldt, en waar we dus geen onwaarheden uit kunnen afleiden. $\square$

We nemen in de rest van dit hoofdstuk aan dat $s > 1, t_2 > 1, t_3 \neq t_2(t_2 + 1)$.

## 2 Het geval $s \neq t_2^2$ en $R > K+1$

**Lemma 5.3.** *Onder bovenstaande voorwaarden en als $s \neq t_2^2$ geldt*

$$t_3 > s^2 t_2 - \frac{s^2}{t_2 - 1} - 1.$$

**Bewijs.** We hernemen ongelijkheid (4.13): $0 \leq t^2 - ((s^2+1)(1+t_2)-1)t + s^4(1+t_2)$. Het rechterlid van deze ongelijkheid kunnen we schrijven als $g(t_3)$ met $g$ een veelterm van de tweede graad met een positieve tweedegraadscoëfficient. Als we getallen $A, B$ vinden met $g(A) < 0$, $g(B) < 0$ en $A < B$, dan weten we dus dat $t_3 < A$ of $B < t_3$. Als $s \leq t_2^2 - t_2 - 1$, dan bekijken we het rechterlid van (4.13) voor $t_3 = s^2 t_2 - \frac{s^2}{t_2-1}$:

$$\begin{aligned}
g(t_3) &= s^4(t_2 - \frac{1}{t_2-1})^2 - ((s^2+1)(t_2+1)-1)s^2(t_2 - \frac{1}{t_2-1}) + s^4(t_2+1) \\
&= s^4(t_2 - \frac{1}{t_2-1})^2 - (s^2 t_2 + s^2 + t_2)s^2(t_2 - \frac{1}{t_2-1}) + s^4(t_2+1) \\
&= s^4(t_2^2 - \frac{2t_2}{t_2-1} + \frac{1}{(t_2-1)^2} + t_2 + 1 - t_2(t_2 - \frac{1}{t_2-1}) - t_2 + \frac{1}{t_2-1}) - t_2 s^2(t_2 - \frac{1}{t_2-1}) \\
&= s^4(t_2^2 + \frac{-2t_2 + t_2 + 1}{t_2 - 1} + \frac{1}{(t_2-1)^2} + 1 - t_2^2) - s^2 t_2^2 + \frac{s^2 t_2}{t_2-1} \\
&= s^4(\frac{-t_2+1}{t_2-1} + \frac{1}{(t_2-1)^2} + 1) - s^2 t_2^2 + \frac{s^2 t_2}{t_2 - 1} \\
&= \frac{s^4}{(t_2-1)^2} - s^2 t_2^2 + \frac{s^2 t_2}{t_2-1}.
\end{aligned}$$

Dankzij de aanname $s \leq t_2^2 - t_2 - 1$ krijgen we echter dat

$$-s^2 t_2^2 + \frac{s^2 t_2}{t_2 - 1} = s^2 \frac{t_2}{t_2-1}(1 - t_2^2 + t_2) \leq -s^3 \frac{t_2}{t_2-1}.$$

Hiermee bekomen we

$$\begin{aligned}
g(t_3) &\leq \frac{s^4}{(t_2-1)^2} - s^3 \frac{t_2}{t_2-1} \\
&= \frac{s^3}{t_2-1}(\frac{s}{t_2-1} - t_2).
\end{aligned}$$

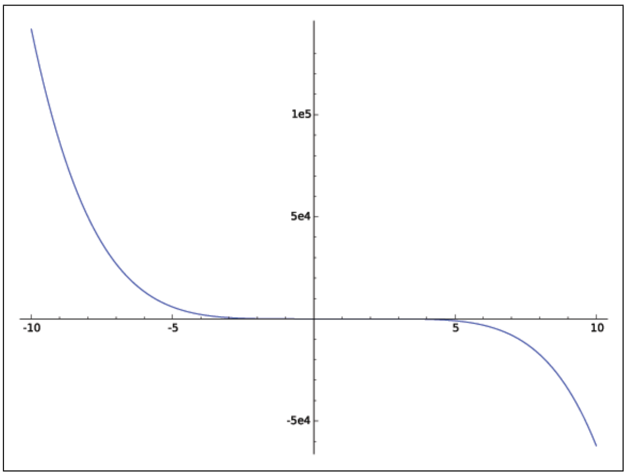
Uit de volgende equivalentie bekomen we dan dat $g(t_3) \leq 0$:

$$\frac{s}{t_2-1} - t_2 \leq 0 \iff s \leq t_2^2 - t_2.$$

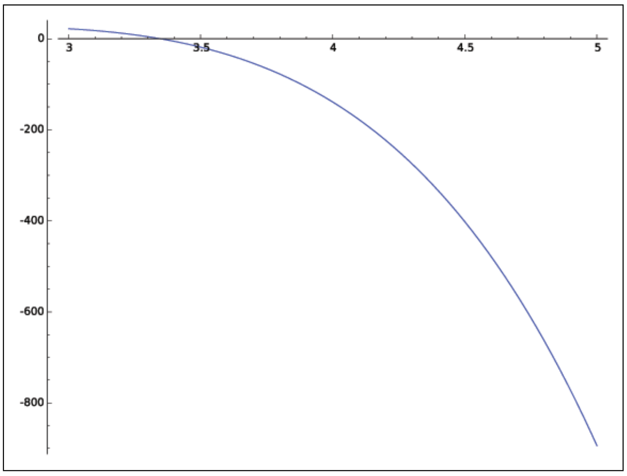
Als $s = t_2^2 - t_2$, $t_2 \geq 4$ en $t_3 = s^2 t_2 - \frac{s^2}{t_2-1} - 1 = t_2^5 - 2t_2^4 + t_2^2 - 1$ bekomen we

$$\begin{aligned}
g(t_3) &= (t_2^5 - 2t_2^4 + t_2^2 - 1)^2 - (s^2 t_2 + s^2 + t_2)(t_2^5 - 2t_2^4 + t_2^2 - 1) + s^4(t_2+1) \\
&= (t_2^5 - 2t_2^4 + t_2^2 - 1)^2 - (t_2^3(t_2-1)^2 + t_2^2(t_2-1)^2 + t_2)(t_2^5 - 2t_2^4 + t_2^2 - 1) + t_2^4(t_2-1)^4(t_2+1) \\
&= -t_2^5 + 4t_2^4 - 2t_2^3 - t_2^2 + t_2 + 1
\end{aligned}$$

Grafisch zien we in Figuur 5.2 en Figuur 5.1 dat dit kleiner dan 0 wordt als $t_2 \geq 4$.




Figuur 5.1: Plot van $g(t_3)$ voor $s = t_2^2 - t_2$ en $t_3 = s^2 t_2 - \frac{s^2}{t_2-1} - 1 = t_2^5 - 2t_2^4 + t_2^2 - 1$ uit Lemma 5.3 met $t_2 \in [-10, 10]$




Figuur 5.2: Plot van $g(t_3)$ voor $s = t_2^2 - t_2$ en $t_3 = s^2 t_2 - \frac{s^2}{t_2-1} - 1 = t_2^5 - 2t_2^4 + t_2^2 - 1$ uit Lemma 5.3 met $t_2 \in [3, 5]$

Als $t_3 = s^2 \frac{t_2+1}{t_2-1}$, dan krijgen we

$$\begin{aligned}
g(t_3) &= \left(s^2 \frac{t_2+1}{t_2-1}\right)^2 - (s^2 t_2 + s^2 + t_2)\left(s^2 \frac{t_2+1}{t_2-1}\right) + s^4(t_2+1) \\
&= s^4 \left(\frac{(t_2+1)^2}{(t_2-1)^2} - t_2 \frac{t_2+1}{t_2-1} - \frac{t_2+1}{t_2-1} + t_2 + 1\right) - s^2 \frac{t_2^2 + t_2}{t_2 - 1} \\
&= s^4(t_2+1)\left(\frac{t_2+1}{(t_2-1)^2} - \frac{t_2+1}{t_2-1} + 1\right) - \frac{s^2 t_2(t_2+1)}{t_2-1} \\
&= s^2(t_2+1)\left(\frac{s^2(t_2+1-(t_2+1)(t_2-1)+(t_2-1)^2)}{(t_2-1)^2} - \frac{t_2}{t_2-1}\right) \\
&= s^2(t_2+1)\left(\frac{s^2(-t_2+3)}{(t_2-1)^2} - \frac{t_2}{t_2-1}\right).
\end{aligned}$$

Uit de volgende equivalentie besluiten we dat $g(t_3) \leq 0$ als $t_2 \geq 3$:

$$\frac{s^2(-t_2+3)}{(t_2-1)^2} - \frac{t_2}{t_2-1} \leq 0 \iff s^2(-t_2+3) \leq t_2(t_2-1).$$

Het spreekt voor zich dat

$$s^2t_2 - \frac{s^2}{t_2-1} - 1 < s^2t_2 - \frac{s^2}{t_2-1}.$$

De ongelijkheid $\frac{s^2(t_2+1)}{t_2-1} < s^2t_2 - \frac{s^2}{t_2-1} - 1$ kunnen we ook schrijven als $s^2(-t_2^2 + 2t_2 + 2) < -t_2 + 1$, wat altijd klopt voor $s \geq 1$ en $t_2 \geq 4$. Dit bewijst dat voor $t_2 \geq 4$ altijd één van de volgende twee mogelijkheden geldt:

$$t_3 < \frac{s^2(t_2+1)}{t_2-1}, \qquad s^2t_2 - \frac{s^2}{t_2-1} - 1 < t_3.$$

Door Lemma 4.13 vinden we in het eerste geval

$$\begin{aligned}(1+t_2)(1+st_2) \leq 1 + t_3 < 1 + \frac{s^2(t_2+1)}{t_2-1},\\ (t_2+1)(t_2-1)(1+st_2) < t_2 - 1 + s^2(t_2+1),\\ (t_2+1)(t_2-1) - (t_2-1) < s^2(t_2+1) - st_2(t_2+1)(t_2-1),\\ t_2(t_2-1) < s(t_2+1)(s - t_2(t_2-1)).\end{aligned}$$

Dankzij Lemma 5.2 en de voorwaarde dat $s^2 \neq t_2$ vinden we ook dat $s \leq t_2(t_2-1)$. Hiermee wordt de vorige ongelijkheid

$$\begin{aligned}&t_2(t_2-1) < t_2(t_2-1)(t_2+1)(t_2(t_2-1) - t_2(t_2-1)),\\ &t_2(t_2-1) < 0.\end{aligned}$$

Dit is strijdig aangezien elk tegenvoorbeeld van Stelling 5.1 moet voldoen aan $t_2 \geq 2$. We houden dus enkel de volgende ongelijkheid over:

$$s^2t_2 - \frac{s^2}{t_2-1} - 1 < t_3.$$

De enige gevallen die nog overblijven, zijn de gevallen $t_2 = 2$ en $t_2 = 3$. Als $t_2 = 2$ kan $s$ enkel $1, 2$ of $4$ zijn, dus moet het onder de gegeven voorwaarden gelijk zijn aan 2. In hoofdstuk 3.5 van [9] vinden we dat de enige schierzeshoeken met parameters $(s, t_2) = (2, 2)$ voldoen aan $t_3 \in \{6, 14\}$. Als $t_3 = 6$, dan is $t_3 = t_2(t_2+1)$ en vinden we dus een klassieke schierzeshoek. Als $t_3 = 14$ is, dan is $t_3 \geq s^2t_2 - \frac{s^2}{t_2-1} = 8 - 4 = 4$. Als $t_2 = 3$ vinden we dankzij Lemma 5.2 dat $s \in \{2, 3, 5, 6\}$. In de volgende tabel bekijken we voor elke mogelijke waarde $s$ welke ondergrens voor $t_3$ we moeten vinden, en we bekijken ook wat de voorwaarde $1 + t_3 \geq (1+t_2)(1+st_2)$ ons al geeft als ondergrens:

| $s$ | $s^2t_2 - \frac{s^2}{t_2-1} - 1$ | $(1+st_2)(1+t_2) - 1$ |
|---|---|---|
| 2 | 9 | 27 |
| 3 | 21.5 | 39 |
| 5 | 61.5 | 63 |
| 6 | 89 | 75 |

We zien dat enkel het geval $(t_2, s) = (3, 6)$ nog een probleem vormt. Hiervoor vinden we dankzij (4.13) dat

$$\begin{aligned}t_3^2 - ((6^2+1)(3+1) - 1)t_3 + 6^4(3+1) \geq 0,\\ t_3^2 - 147t_3 + 5184 \geq 0,\end{aligned}$$

waaruit volgt dat $t_3 \leq 58$ of $t_3 \geq 89$. Uit $1 + t_3 \geq (1+t_2)(1+st_2)$ vonden we dat $t_3 \geq 75$ en uit $t_2 | t_3$ volgt dat $t_3 \geq 90$ (want 3 is geen deler van 89). $\square$

In de volgende stelling sluiten we nu schierveelhoeken met $s \neq t_2^2$ en $R > K + 1$ uit.

**Stelling 5.4.** *Elk tegenvoorbeeld voor de stelling voldoet aan $s = t_2^2$ of $R = K$ of $R = K + 1$.*

**Bewijs.** Stel dat $s \neq t_2^2$ en $R > K + 1$. We schrijven $R = K + m$ met $m > 1$. In het bewijs hierboven zagen we dat als $t_2 = 2$, we dan parameters $(2, 2, 14, t_4)$ hebben. In de opmerking na Lemma 27 in [4] werd echter bewezen dat zulke schierachthoeken niet bestaan. We mogen dus veronderstellen dat $t_2 > 2$. We weten dat

$$K = t_3/t_2 \geq s^2 - \frac{s^2}{t_2(t_2-1)} - \frac{1}{t_2} \geq s^2 - s - \frac{1}{t_2}, \tag{5.1}$$

waarbij we gebruik hebben gemaakt van $s \leq t_2(t_2 - 1)$. Omdat $K$ een geheel getal is, geldt dat

$$K \geq \left\lceil s^2 - s - \frac{1}{t_2} \right\rceil = s^2 - s.$$

Dankzij Lemma 4.15 weten we echter dat

$$\begin{aligned} s^2 - s \leq K &\leq m(m-1), \\ m - s &\leq m^2 - s^2. \end{aligned}$$

Als $m \leq s$, dan bekomen we de ongelijkheid $1 \geq m + s$ wat strijdig is met het gegeven $m > 1$. Er moet dus gelden dat $m \leq s$. Dit leidt tot de ongelijkheid $1 \leq m + s$, die wel klopt. We weten dus dat $K + m \geq s^2 - s + s = s^2$. Uit (4.16) halen we

$$K + m = R = \frac{t_4 - t_2}{t_3 - t_2} \leq \frac{s^2(t_3 - t_2 + 1) + t_3 - t_2}{t_3 - t_2} = s^2 + 1 + \frac{s^2}{t_3 - t_2}.$$

Stel nu $s^2 \geq t_3 - t_2$. Dan geldt

$$\begin{aligned} 1 + t_3 &\geq (1 + t_2)(1 + st_2), \\ t_3 &\geq t_2 + st_2 + st_2^2, \\ t_3 - t_2 &\geq st_2(t_2 + 1), \\ s^2 &\geq st_2(t_2 + 1), \\ s &\geq t_2(t_2 + 1), \end{aligned}$$

wat strijdig is, dus $s^2 < t_3 - t_2$. We bekomen dat $R \leq s^2 + 1$.

Als nu $K > s^2 - s$ (dus $K \geq s^2 - s + 1$), dan bekomen we volgens de redenering hierboven dat $m > s$ (dus $m \geq s + 1$) en dat $R = K + m \geq s^2 - s + 1 + s + 1 = s^2 + 2$, een strijdigheid. De enige mogelijkheid is dat $K = s^2 - s$. In (5.1) krijgen we dan

$$\begin{aligned} s^2 - s \geq s^2 - \frac{s^2}{t_2(t_2-1)} - \frac{1}{t_2} &\geq s^2 - s - \frac{1}{t_2}, \\ s \leq \frac{s^2}{t_2(t_2-1)} + \frac{1}{t_2} &\leq s + \frac{1}{t_2}. \end{aligned}$$

Dit kan enkel als

$$\begin{aligned} s &= \frac{s^2}{t_2(t_2-1)}, \\ s &= t_2(t_2 - 1). \end{aligned}$$

Modulo $t_2 + 1$ krijgen we de volgende gelijkheden:

$$\begin{aligned} s &= t_2^2 - t_2 \\ &\equiv t_2^2 + 1 \\ &\equiv -1 - 2t_2 + 1 \\ &\equiv -2t_2 \\ &\equiv 2. \end{aligned}$$

Hieruit vinden we dat $K = 2 \mod t_2 + 1$ dus $t_3 = Kt_2 = -2 \mod t_2 + 1$. Echter uit Lemma 4.5 vinden we opnieuw modulo $t_2 + 1$ dat

$$\begin{aligned} t_3(t_3 + 1) &\equiv 0, \\ (-2) * (-1) &\equiv 0, \\ 2 &\equiv 0, \end{aligned}$$

wat strijdig is aangezien $t_2 > 2$. □

# 3 Het geval $R = K + 1$

Als $R = K + 1$ vinden we dat $R = \frac{V-1}{K-1} = K + 1$. Hieruit volgt dat $V - 1 = K^2 - 1$. Het Steinersysteem heeft dus de vorm $S(2, q, q^2)$.

**Definitie 5.5.** *Een ruimte is lokaal $AG(2, q)$ als de ruimte $(X, L)$ gelijk is aan $AG(2, q)$ met $X$ de rechten door een vast punt $x$ en $L$ de ruimte van vlakken door datzelfde vast punt $x$.*

**Lemma 5.6.** *Het Steinersysteem $S(2, q, q^2)$ komt overeen met $AG(2, q)$.*

**Bewijs.** We gaan de axioma's van $AG(2, q)$ na. Een algemeen Steinersysteem noemen we hier $S(a, b, c)$.

- Door twee punten gaat exact één rechte. Dit volgt uit $a = 2$.
- Elke rechte bevat minstens twee punten. Dit volgt uit $b = q \geq 2$.
- Er bestaan drie niet-collineaire punten. Dit volgt uit het feit dat er $q^2$ punten in het Steinersysteem zijn, terwijl er maar $q$ punten op een rechte liggen.
- Gegeven een punt $p$ en een rechte $l$ niet door $p$, vinden we een rechte door $p$ die geen punten gemeenschappelijk heeft met $l$. Stel dat dit niet het geval zou zijn, dan zouden alle rechten door $p$ (zo zijn er $R = q + 1$) een punt bevatten van $l$. Omdat $l$ slechts $q$ punten bevat, moeten er dus twee rechten door $p$ zijn die hetzelfde punt $p'$ van $l$ bevatten. Omdat twee punten exact één rechte bepalen, verkrijgen we hier een strijdigheid.

We kunnen dus besluiten dat het Steinersysteem $S(2, q, q^2)$ overeenkomt met de ruimte $AG(2, q)$. □

Omdat ons Steinersysteem overeenkomt met de structuur van quads en hexen door een vaste rechte, kunnen we zeggen dat de ruimte van rechten, quads en hexen door een vast punt in de reguliere schier-achthoek $X$ lokaal $AG(2, q)$ is.

**Lemma 5.7.** *In een ruimte die lokaal $AG(2, q)$ is, liggen op elke rechte exact twee punten.*

**Bewijs.** Doordat de ruimte lokaal $AG(2, q)$ is, gaan er door elk punt $q^2$ rechten, $q$ rechten die in een vast vlak liggen, en $q^2 + q$ vlakken. Door elke rechte gaan $q + 1$ vlakken. Stel dat er $k$ punten op elke rechte liggen, dan liggen er $1 + (k - 1)q$ punten in elk vlak en $1 + (k - 1)q^2$ punten in de volledige ruimte. Het aantal vlakken is

$$\frac{(1 + (k - 1)q^2)(q^2 + q)}{1 + (k - 1)q} = (q^2 + q)(q + \frac{1 - q}{1 + (k - 1)q}).$$

Dit moet een natuurlijk getal zijn, dus moet $\frac{q(q+1)(1-q)}{1+(k-1)q}$ een natuurlijk getal zijn. Omdat $(q, 1+(k-1)q) = 1$, moet $1 + (k - 1)q | (q + 1)(1 - q)$ en dus krijgen we modulo $1 + (k - 1)q$ de volgende gelijkheden:

$$\begin{aligned} q^2 - 1 &\equiv 0 \\ q^2 + (k - 1)q &\equiv 0 \\ (q + k - 1)q &\equiv 0 \\ q + k - 1 &\equiv 0. \end{aligned}$$

In de laatste stap hebben we gebruik gemaakt van $(q, 1 + (k-1)q) = 1$. We weten dus dat $1 + (k-1)q$ een deler is van $q + k - 1$ en dus dat $1 + (k-1)q \leq q + k - 1$. We vinden

$$\begin{aligned} 1 + (k-1)q &\leq q + k - 1, \\ 1 - q - (k-1) + (k-1)q &\leq 0, \\ 1 - q - (1-q)(k-1) &\leq 0, \\ (1-q)(2-k) &\leq 0, \\ (q-1)(k-2) &\leq 0. \end{aligned}$$

Omdat $K = q > 1$, moet dus $k \leq 2$. Als $k = 1$ hebben we slechts 1 punt per rechte, dus moet $k = 2$. □

In ons geval is $q = K = \frac{t_3}{t_2}$ en $k$ is het aantal rechten door een vast punt in een quad, dus $k = t_2 + 1$. We vinden dat $t_2 = 1$, dus geldt Stelling 5.1 hier.

# 4 Het geval $R = K$

Hier is $R = \frac{V-1}{K-1} = K$, dus $V = K^2 - K + 1$. Het Steinersysteem is dus van de vorm $S(2, q+1, q^2+q+1)$. De ruimte van rechten, quads en hexen door een vast punt is dus lokaal projectief. Twee punten (quads) bepalen immers exact één rechte (hex). We vinden ook $q+1$ punten (quads) op één rechte (hex), en de volledige ruimte bevat $q^2 + q + 1$ punten (quads). Hieruit volgt dat er $q + 1$ punten (quads) op een rechte (hex) liggen. De parameters van een eindige, reguliere, lokaal projectieve ruimte worden in ons geval $q + 1 = K = \frac{t_3}{t_2}$ en $k = t_2 + 1$. Uit hoofdstuk 3 weten we dat $q + 1 - k \in \{0, 1, k^2 - k + 1, k^3 + 1\}$.

Als $q + 1 - k = 0$, dan is $\frac{t_3}{t_2} - t_2 - 1 = 0$ dus $t_3 = t_2(t_2 + 1)$ wat wil zeggen dat de hexen klassiek zijn (er zijn immers geen ovoïdale punten). Dit is geen tegenvoorbeeld voor Stelling 5.1. We kunnen dit geval dus uitsluiten.

Als $q + 1 - k = 1$, dan is $\frac{t_3}{t_2} - t_2 - 1 = 1$ dus $t_3 = t_2(t_2 + 2)$. Omdat $1 + t_3 \geq (1 + t_2)(1 + st_2)$, krijgen we

$$(1 + t_2)(1 + st_2) \leq t_2^2 + 2t_2 + 1 = (t_2 + 1)^2,$$

wat strijdig is met de aanname $s > 1$.

Uit $q + 1 - k = k^2 - k + 1$ volgt $q + 1 = k^2 + 1$ en dus $\frac{t_3}{t_2} = (t_2 + 1)^2 + 1$. Doordat we het geval $1 + t_3 = (1 + t_2)(1 + st_2)$ al behandeld hebben, weten we dat $t_3 > (1 + t_2)(1 + st_2) - 1 = st_2^2 + st_2 + t_2$. Samengevat wordt dit

$$\begin{aligned} t_3 &> st_2^2 + st_2 + t_2, \\ \frac{t_3}{t_2} &> st_2 + s + 1, \\ (t_2 + 1)^2 + 1 &> st_2 + s + 1, \\ t_2 + 1 &> s, \end{aligned}$$

dus $s \leq t_2$. We hadden reeds gevonden dat $K = R \leq s^2 + 1$, dus

$$\begin{aligned} \frac{t_3}{t_2} &\leq s^2 + 1, \\ st_2 + s + 1 &< s^2 + 1, \\ t_2 + 1 &< s. \end{aligned}$$

In de tweede ongelijkheid maken we gebruik van Lemma 4.13. We vinden dus een strijdigheid.

De enige overige mogelijkheid is dus $q + 1 - k = k^3 + 1$, wat zich vertaalt naar

$$\frac{t_3}{t_2} = t_2^3 + 3t_2^2 + 4t_2 + 3.$$

Het feit dat de ruimte lokaal projectief is, betekent dat twee verschillende vlakken ofwel niet snijden, ofwel in een rechte snijden. Vertaald naar de ruimte van rechten, quads en hexen door een vast punt, betekent dit dat twee hexen ofwel niet snijden, ofwel in een punt, ofwel in een quad. Als we nu een hex $H$ en een punt $x \in \Gamma_2(H)$ nemen, dan vinden we in de vergelijkingen over punt-hex relaties dat $b_1 = 0$. Als er immers een punt $y$ in $B_1$ zou bestaan, dan zouden het hex $H(y, x)$ en het hex $H$ snijden in de rechte $yz$ met $z$ het unieke punt $A \bigcap \Gamma_1(y)$. Bijgevolg worden (4.2), (4.3), (4.4) en (4.5) de volgende vergelijkingen:

$$\begin{aligned}
a + b_0 + b_2 + c &= (s+1)(1 + st_3 + \frac{s^2 t_3(t_3 - t_2)}{1 + t_2}),\\
b_2(t_2 + 1) &= sa(t_3 + 1),\\
b_0(t_3 + 1) + b_2(t_3 - t_2) &= \frac{c(t_3 + 1)}{s},\\
b_2 &= \frac{a(a-1)}{t_2}.
\end{aligned}$$

We vinden

$$\begin{aligned}
\frac{a(a-1)}{t_2} &= \frac{sa(t_3 + 1)}{t_2 + 1},\\
a - 1 &= \frac{st_2(t_3 + 1)}{t_2 + 1}\\
&= \frac{st_2(t_2(t_2^3 + 3t_2^2 + 4t_2 + 3) + 1)}{t_2 + 1}\\
&= \frac{st_2(t_2^4 + 3t_2^3 + 4t_2^2 + 3t_2 + 1)}{t_2 + 1}\\
&= \frac{st_2(t_2 + 1)(t_2^3 + 2t_2^2 + 2t_2 + 1)}{t_2 + 1}\\
&= st_2(t_2^3 + 2t_2^2 + 2t_2 + 1).
\end{aligned}$$

In het bijzonder is $a$ dus constant.

**Lemma 5.8.** *Het punt $x$ heeft een buur $y \in \Gamma_3(H)$.*

**Bewijs.** Als $x$ geen buren heeft in $\Gamma_3(H)$, dan hebben we gelijkheid in (4.7), dus

$$a(t_2 + 1)(s - 1) + b(t_3 + 1) = (s(t_4 + 1) - a(t_2 + 1))a + a(t_2 + 1)s(t_3 + 1).$$

Hieruit volgt:

$$\begin{aligned}
s(t_4 + 1) - a(t_2 + 1) + (t_2 + 1)(t_3 + 1)s &= \frac{b(t_3 + 1)}{a} + (t_2 + 1)(s - 1),\\
s(t_4 + 1) + s(t_2 + 1)(t_3 + 1) - s(t_2 + 1) + (t_2 + 1) - a(t_2 + 1) &= \frac{b(t_3 + 1)}{a},\\
s(t_4 + 1 + (t_2 + 1)(t_3 + 1) - t_2 - 1) - (a - 1)(t_2 + 1) &= \frac{b(t_3 + 1)}{a},\\
s(t_4 + 1 + (t_2 + 1)(t_3 + 1) - t_2 - 1) - s\frac{t_2(t_3 + 1)(t_2 + 1)}{t_2 + 1} &= \frac{b(t_3 + 1)}{a},\\
s(t_4 + 1 + (t_2 + 1)(t_3 + 1) - t_2 - 1 - t_2(t_3 + 1))a &= b(t_3 + 1),\\
s(t_4 + t_3 - t_2 + 1)a &= b(t_3 + 1). \qquad (5.2)
\end{aligned}$$

Dankzij (4.9) en (4.5) weten we dat de volgende gelijkheden gelden:

$$\begin{aligned}
b &= b_0 + b_1 + b_2,\\
b_0 &= a^2 - a(st_3 + 2) + 1 + st_3 + \frac{s^2 t_3(t_3 - t_2)}{1 + t_2},\\
b_1 &= 0,\\
b_2 &= \frac{a(a-1)}{t_2}.
\end{aligned}$$

We combineren dit tot

$$
\begin{aligned}
b &= a^2 - a(st_3+2) + 1 + st_3 + \frac{s^2t_3(t_3-t_2)}{1+t_2} + \frac{a(a-1)}{t_2},\\
b &= a\left(a - st_3 - 2 + \frac{a-1}{t_2}\right) + 1 + st_3 + \frac{s^2t_3(t_3-t_2)}{1+t_2},\\
b &= a\left(\frac{st_2(t_3+1)}{t_2+1} - st_3 - 1 + \frac{s(t_3+1)}{t_2+1}\right) + 1 + st_3 + \frac{s^2t_3(t_3-t_2)}{1+t_2},\\
b &= a\left(s\left(\frac{t_2(t_3+1)}{t_2+1} - t_3 + \frac{t_3+1}{t_2+1}\right) - 1\right) + 1 + st_3 + \frac{s^2t_3(t_3-t_2)}{1+t_2},\\
b &= a(s(t_3+1-t_3)-1) + 1 + st_3 + \frac{s^2t_3(t_3-t_2)}{1+t_2},\\
b &= a(s-1) + 1 + st_3 + \frac{s^2t_3(t_3-t_2)}{1+t_2}.
\end{aligned}
$$

Als we dit in de (5.2) steken, krijgen we

$$
\begin{aligned}
s(t_4+t_3-t_2+1)a &= \left(a(s-1) + 1 + st_3 + \frac{s^2t_3(t_3-t_2)}{1+t_2}\right)(t_3+1),\\
s(t_4+t_3-t_2+1)a - a(s-1)(t_3+1) &= \left(1 + st_3 + \frac{s^2t_3(t_3-t_2)}{1+t_2}\right)(t_3+1),\\
a(s(t_4+t_3-t_2+1-t_3-1) + t_3 + 1) &= \left(1 + st_3 + \frac{s^2t_3(t_3-t_2)}{1+t_2}\right)(t_3+1),\\
a(s(t_4-t_2) + t_3 + 1) &= \left(1 + st_3 + \frac{s^2t_3(t_3-t_2)}{1+t_2}\right)(t_3+1).
\end{aligned}
$$

Doordat $R = K$, is $t_4 - t_2 = \frac{t_3}{t_2}(t_3 - t_2)$. We krijgen

$$
\begin{aligned}
a\left(s(t_3-t_2)\frac{t_3}{t_2} + t_3 + 1\right) &= \left(1 + st_3 + \frac{s^2t_3(t_3-t_2)}{1+t_2}\right)(t_3+1),\\
\left(1 + \frac{st_2(t_3+1)}{t_2+1}\right)\left(s(t_3-t_2)\frac{t_3}{t_2} + t_3 + 1\right) &= \left(1 + st_3 + \frac{s^2t_3(t_3-t_2)}{1+t_2}\right)(t_3+1),\\
s(t_3-t_2)\frac{t_3}{t_2} + t_3 + 1 + \frac{s^2t_3(t_3-t_2)(t_3+1)}{t_2+1} + \frac{st_2(t_3+1)^2}{t_2+1} &= (1+st_3)(t_3+1) + \frac{s^2t_3(t_3-t_2)}{1+t_2}(t_3+1),\\
s(t_3-t_2)\frac{t_3}{t_2} + t_3 + 1 + \frac{st_2(t_3+1)^2}{t_2+1} &= (1+st_3)(t_3+1),\\
(t_3-t_2)\frac{t_3}{t_2} + \frac{t_2(t_3+1)^2}{t_2+1} &= t_3(t_3+1),\\
(t_3-t_2)t_3(t_2+1) + t_2^2(t_3+1)^2 &= t_3(t_3+1)t_2(t_2+1),\\
t_2t_3^2 + t_3^2 - t_2^2t_3 - t_2t_3 + t_2^2t_3^2 + 2t_2^2t_3 + t_2^2 &= t_2^2t_3^2 + t_2^2t_3 + t_2t_3^2 + t_2t_3,\\
t_3^2 - 2t_2t_3 + t_2^2 &= 0,\\
(t_3-t_2)^2 &= 0.
\end{aligned}
$$

dus moet $t_2 = t_3$, een strijdigheid. □

Er is dus een buur $y$ van $x$ met $d(y, H) = 3$. Dit punt $y$ moet ovoïdaal zijn. Er kunnen immers geen adjacente puntenparen in $\Gamma_3(y) \bigcap H$ liggen. Als $\Gamma_3(y) \bigcap H$ geen ovoïde zou zijn, zouden we punten $z$ in $H$ vinden met $d(y, z) > 4$. De grootte van de ovoïde $O = \Gamma_3(y) \bigcap H$ is gelijk aan $a + c/s$. Inderdaad, de $a$ punten op afstand 2 van $x$ liggen al zeker in $\Gamma_3(y) \bigcap H$. Als we nu een rechte nemen in $H$ die punten op afstand 4 bevat van $x$, dan bevat deze rechte één punt op afstand 3 en $s$ punten op afstand 4 van $x$. Als we nu koppels $(l, z)$ tellen met $d(x, z) = 4$ en $l$ een rechte in $H$ door $z$, vinden we de gelijkheid $Ls = c(t_3 + 1)$. Hierbij staat $L$ voor het aantal rechten dat punten bevat op afstand 4 van $x$. De punten van deze rechten liggen in $H$, dus liggen op afstand 3 of 4 van $y$. Op elke rechte is er dus één punt op afstand 3 van $y$, dus dit punt ligt ook in $O$. Per punt van $O$ 'bedekken' we echter $t_3+1$ rechten van $H$. Zo vinden we $\frac{c}{s}$ punten van $O$ in $C$. We vinden dankzij (4.6) dat

$$|O| = a + c/s = 1 + st_3 + \frac{s^2 t_3(t_3 - t_2)}{1 + t_2}.$$

We tellen nu puntenparen $(u, v)$ met $v \in O$, $d(u, y) = 1$ en $d(u, v) = 2$. Hieruit weten we al dat de mogelijke punten $u$ op afstand 2 van $H$ moeten liggen. We vinden $|O|$ mogelijkheden voor het punt $v$ en per punt $v$ zijn er $t_3 + 1$ mogelijke punten $u$. Het punt $u$ is een buur van $y$, dus hebben we hoogstens $s(t_4 + 1)$ mogelijke punten $u$. Voor een vast punt $u$ vinden we $a$ punten $v$ in $H$ die sowieso in $O$ liggen. We krijgen

$$\begin{aligned}
s(t_4+1)a &\geq |O|(t_3+1),\\
s(t_4+1)\left(1+\frac{st_2(t_3+1)}{t_2+1}\right) &\geq (t_3+1)\left(1+st_3+\frac{s^2t_3(t_3-t_2)}{1+t_2}\right),\\
s\frac{t_4+1}{t_3+1} &\geq 1+st_3+\frac{s^2t_3(t_3-t_2)}{1+t_2}-s\frac{t_4+1}{t_3+1}\frac{st_2(t_3+1)}{t_2+1}\\
&= 1+st_3+\frac{s^2t_3(t_3-t_2)}{1+t_2}-s\frac{st_2(t_4+1)}{t_2+1}\\
&= 1+st_3+\frac{s^2\left(t_3(t_3-t_2)-t_2\left(\frac{t_3}{t_2}(t_3-t_2)+t_2+1\right)\right)}{1+t_2}\\
&= 1+st_3+\frac{s^2(t_3(t_3-t_2)-t_3(t_3-t_2)-t_2^2-t_2))}{1+t_2} = 1+st_3-s^2t_2.
\end{aligned}$$

We weten ook dat $\frac{t_4-t_2}{t_3-t_2} \geq \frac{t_4+1}{t_3+1}$. Inderdaad,

$$\begin{aligned}
\frac{t_4-t_2}{t_3-t_2} &\geq \frac{t_4+1}{t_3+1},\\
\frac{\frac{t_3}{t_2}(t_3-t_2)+t_2-t_2}{t_3-t_2} &\geq \frac{\frac{t_3}{t_2}(t_3-t_2)+t_2+1}{t_3+1},\\
\frac{t_3}{t_2}(t_3+1) &\geq \frac{t_3}{t_2}(t_3-t_2)+t_2+1,\\
\frac{t_3}{t_2}(t_3+1-t_3+t_2) &\geq t_2+1,\\
\frac{t_3}{t_2} &\geq 1.
\end{aligned}$$

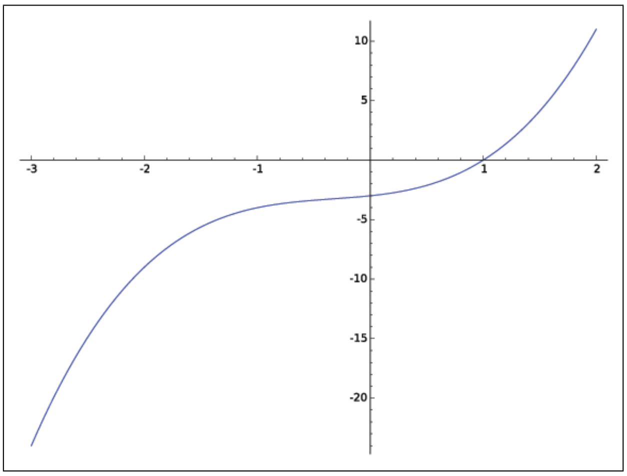
We kunnen dus schrijven

$$\begin{aligned}
&s\frac{t_3}{t_2} = s\frac{t_4-t_2}{t_3-t_2} \geq s\frac{t_4+1}{t_3+1} > st_3 - s^2t_2,\\
&\frac{t_3}{t_2} > t_3 - st_2,\\
&t_3 > t_3t_2 - st_2^2,\\
&s > \frac{t_3(t_2-1)}{t_2^2} = \frac{(t_2^3+3t_2^2+4t_2+3)(t_2-1)}{t_2},\\
&s > \frac{t_2^4+2t_2^3+t_2^2-t_2-3}{t_2} = t_2^3+2t_2^2+t_2-1-\frac{3}{t_2},\\
&s > t_2^3+2t_2^2+t_2-1-\frac{3}{t_2} > t_2^3+2t_2^2+t_2-3,
\end{aligned}$$

waarbij we in de laatste stap gebruik hebben gemaakt van $t_2 \geq 2$. Omdat $s \leq t_2^2$, krijgen we de ongelijkheid

$$0 > t_2^3 + t_2^2 + t_2 - 3.$$

Grafisch zien we in Figuur 5.3 dat dit enkel kan als $t_2 \leq 0$, een strijdigheid.




Figuur 5.3: Plot van $t_2^3 + t_2^2 + t_2 - 3$ met $t_2 \in [-3, 2]$

# 5 Het geval $s = t_2^2$

De enige schierveelhoeken waarvan we nog niet weten of ze voldoen aan Stelling 5.1 zijn die waarvoor $s = t_2^2$. De gevallen $R = K$ en $R = K + 1$ hebben we al behandeld. We stellen nu $s = t_2^2$, $R = K + m$ met $m(m-1) > K$. Later zullen we hier een strijdigheid uit afleiden en besluiten dat $K = m(m-1)$. Omdat $K|m(m-1)$, geldt dus $m(m-1) \geq 2K$.

**Lemma 5.9.** *Als $t_2 \geq 3$, dan is $t_3 > t_2^5 - t_2^3 - t_2^2 - 8t_2$ of $t_3 < s^2 \frac{t_2+1}{t_2-1}$.*

**Bewijs.** Voor $t_3 = t_2^5 - t_2^3 - t_2^2 - 8t_2$ krijgen we in (4.13)

$$g(t_3) = -7t_2^6 + 10t_2^5 + 18t_2^4 + 17t_2^3 + 72t_2^2$$

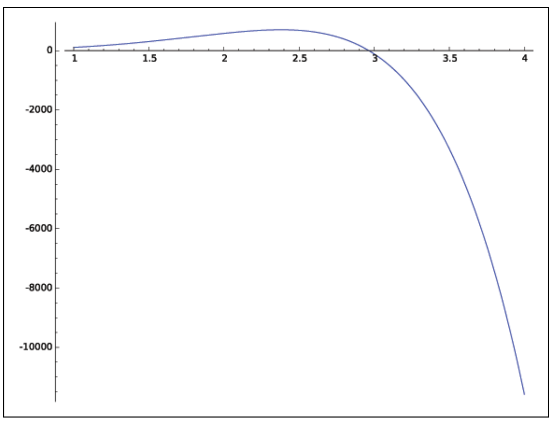
wat negatief is voor $t_2 \geq 3$, zoals te zien is om Figuur 5.4. Voor $t_3 = s^2 \frac{t_2+1}{t_2-1}$ krijgen we

$$g(t_3) = \frac{-t_2^{10} + 2t_2^9 + 3t_2^8 - t_2^7 + t_2^5}{(t_2 - 1)^2}$$

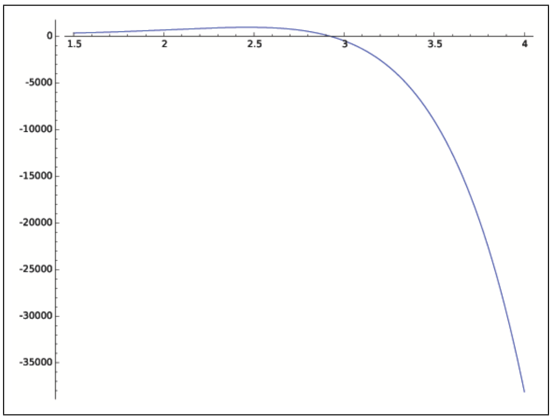
wat eveneens negatief is voor $t_2 \geq 3$, zoals we kunnen zien in Figuur 5.5. De veelterm

$$t_2^5 - t_2^3 - t_2^2 - 8t_2 - t_2^4 \frac{t_2 + 1}{t_2 - 1}$$

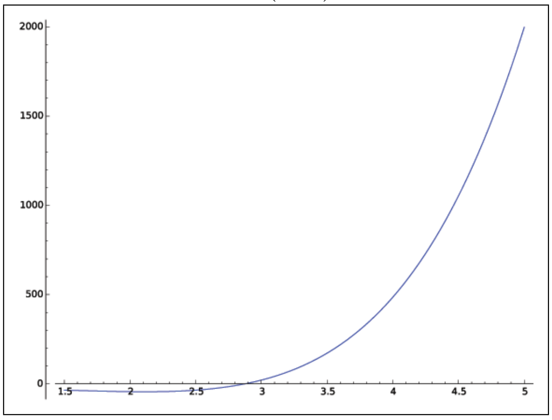
is positief is voor $t_2 \geq 3$, zoals te zien is in Figuur 5.6. We bekomen het gewenste resultaat. $\square$




Figuur 5.4: Plot van $-7t_2^6 + 10t_2^5 + 18t_2^4 + 17t_2^3 + 72t_2^2$ met $t_2 \in [1, 4]$




Figuur 5.5: Plot van $\frac{-t_2^{10}+2t_2^9+3t_2^8-t_2^7+t_2^5}{(t_2-1)^2}$ met $t_2 \in [1.5, 4]$




Figuur 5.6: Plot van $t_2^5 - t_2^3 - t_2^2 - 8t_2 - t_2^4 \frac{t_2+1}{t_2-1}$ met $t_2 \in [1.5, 4]$

**Lemma 5.10.** *Als* $s = t_2^2$, *dan is* $t_3 < s^2 \frac{t_2+1}{t_2-1}$ *of* $R \leq K + 1$.

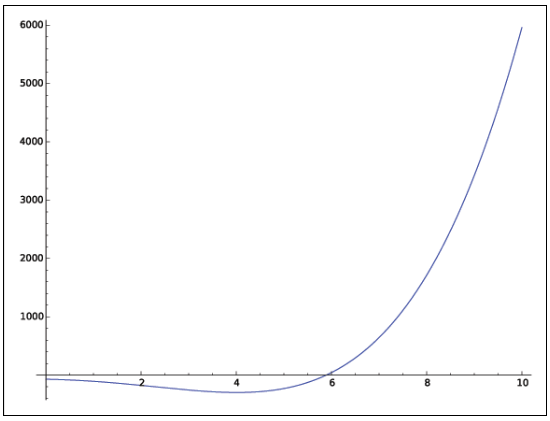
**Bewijs.** Stel $s = t_2^2$, $R = K + m$, $K < m(m-1)$ en $t_3 \geq s^2 \frac{t_2+1}{t_2-1}$, dan moet

$$K = \frac{t_3}{t_2} \geq t_2^4 - t_2^2 - t_2 - 7. \tag{5.3}$$

Er geldt nog steeds dat $R \leq s^2 + 1 = t_2^4 + 1$. Uit $R = K + m$ vinden we nu de ongelijkheid $m \leq t_2^2 + t_2 + 8$ en

$$2(t_2^4 - t_2^2 - t_2 - 7) \leq 2K \leq m(m-1) \leq t_2^4 + 2t_2^3 + 16t_2^2 + 15t_2 + 56.$$

Dit betekent dat $t_2^4 - 2t_2^3 - 18t_2^2 - 17t_2 - 70 \leq 0$. Dit kan enkel als $t_2 \leq 5$, zoals we zien in Figuur 5.7.




Figuur 5.7: Plot van $t_2^4 - 2t_2^3 - 18t_2^2 - 17t_2 - 70$ met $t_2 \in [0, 10]$

Voor $t_2 = 5$, $s = 25$ bekomen we de grenzen

$$\begin{aligned} &K \geq t_2^4 - t_2^2 - t_2 - 7 = 588, \\ &R \leq s^2 + 1 = 626, \\ &m \leq t_2^2 + t_2 + 8 = 38. \end{aligned}$$

Hieruit vinden we $3K \geq 1764$ en $m(m-1) \leq 1406$. De voorwaarde $K|m(m-1)$ betekent hier dus dat $2K = m(m-1)$ , dus dat $K = \frac{m(m-1)}{2}$ en $R = \frac{m(m+1)}{2}$. Hieruit halen we $m(m-1) \geq 1176$ en $m(m+1) \leq 1252$. We vinden echter volgende waarden voor $m$, $m(m+1)$ en $m(m-1)$:

| $m$ | $m(m+1)$ | $m(m-1)$ |
|---|---|---|
| 34 | 1190 | 1122 |
| 35 | 1260 | 1190 |
| 36 | 1332 | 1260 |
| 37 | 1406 | 1332 |
| 38 | 1482 | 1406 |

Hieruit volgt dat er geen $m$ bestaat die aan de voorwaarden voldoet.

Voor $t_2 = 4$, $s = 16$ vinden we $K \geq 229$, $R \leq 257$, $m \leq 28$. Doordat $916 \leq 4K$ en $m(m-1) \leq 756$, is ofwel $K = \frac{m(m-1)}{2}$ ofwel $K = \frac{m(m-1)}{3}$. In dit tweede geval is $R = \frac{m(m+2)}{3}$. Hieruit volgt dan dat $m(m-1) \geq 687$ en $m(m+2) \leq 771$. Uit de volgende tabel zien we echter dat er zo geen $m$ bestaat:

| $m$ | $m(m+2)$ | $m(m-1)$ |
|---|---|---|
| 26 | 728 | 650 |
| 27 | 783 | 702 |
| 28 | 840 | 756 |

Er moet dus gelden dat $K = \frac{m(m-1)}{2}$, dus dat $R = \frac{m(m+1)}{2}$. We krijgen de grenzen $m(m-1) \geq 458$ en $m(m+1) \leq 514$. We bekijken nu welke waarden er mogelijk zijn voor $m$:

| $m$ | $m(m+1)$ | $m(m-1)$ |
|---|---|---|
| 21 | 462 | 420 |
| 22 | 506 | 462 |
| 23 | 552 | 506 |

We besluiten dat $m = 22$, $K = 231$, $R = 253$ en $t_3 = 924$. Vullen we dit in (4.13) in, dan krijgen we $-6808 \geq 0$, een strijdigheid.

Voor $t_2 = 3$, $s = 9$ bekomen we de grenzen $K \geq 62$, $R \leq 82$ en $m \leq 20$. Aangezien voor geen enkele $m \leq 20$ geldt dat $62|m(m-1)$ moet $K \geq 63$, waaruit volgt dat $m \leq 19$ en $m(m-1) \leq 342$. Aangezien $6K \geq 378$ beginnen we met het geval $K = \frac{m(m-1)}{5}$. Dan moet $m \leq 16$ (want voor $16 < m \leq 19$ is $m(m-1)$ niet deelbaar door 5), dus is $K = \frac{m(m-1)}{5} \leq 48$, strijdig. Als $K = \frac{m(m-1)}{4}$, dan vinden we de volgende waarden:

| $m$ | $K$ | $R$ |
|---|---|---|
| 16 | 60 | 76 |
| 17 | 68 | 85 |

We zien dat geen enkele $m$ voldoet. Als $K = \frac{m(m-1)}{3}$ vinden we de volgende waarden:

| $m$ | $K$ | $R$ |
|---|---|---|
| 12 | 44 | 56 |
| 13 | 52 | 65 |
| 15 | 70 | 85 |
| 16 | 80 | 96 |

Er is dus geen enkele $m$ die aan de voorwaarden voldoet. Als $K = \frac{m(m-1)}{2}$, dan vinden we de volgende waarden:

| $m$ | $K$ | $R$ |
|---|---|---|
| 11 | 55 | 66 |
| 12 | 66 | 78 |
| 13 | 78 | 91 |

We zien dat $m = 12$. We vinden dat $t_3 = t_2K = 198$. De voorwaarde $t_2(t_2+1)|t_3(t_3+1)$ uit Lemma 4.5 wordt hier $12|39402$, wat een strijdigheid oplevert want $39402/12 = 3283.5$.

Als $t_2 = 2$, $s = 4$ vinden we geen restrictie uit (4.13). Deze ongelijkheid wordt immers $t_3^2 - 50t_3 + 768 \geq 0$, wat altijd geldt. De ongelijkheid (4.15) geeft ons voorwaarde $t_3 \leq s^3 + t_2(s^2 - s + 1) = 90$. We weten ook dat $t_3 \geq (1+t_2)(1+st_2) = 27$ moet gelden. Voor de tussenliggende waarden moeten we de volgende voorwaarden testen:

$$t_2|t_3 \to 2|t_3 \tag{5.4}$$

$$t_2(t_2+1)|t_3(t_3+1) \to 6|t_3(t_3+1) \tag{5.5}$$

$$t_2+1|s^2t_3(t_3-t_2) \to 3|16t_3(t_3-2) \tag{5.6}$$

$$\begin{aligned} s^2(t_2+1) + st_3(t_2+1) + t_3(t_3-t_2)&|(1 + st_3 + \frac{s^2t_3(t_3-t_2)}{t_2+1})s^3(t_2+1) \\ &\to t_3^2 + 10t_3 + 48|1024t_3^2 - 1280t_3 + 192 \end{aligned} \tag{5.7}$$

Hier volgt (5.4) uit het feit dat $K$ een geheel getal is. De voorwaarde (5.5) vinden we terug in Lemma 4.5. De voorwaarde (5.6) volgt uit het feit dat het aantal punten in een hex geheel is, meer bepaald uit het geheel zijn van (4.1). De voorwaarde (5.7) volgt uit het feit dat de multipliciteiten van de eigenwaarden van een hex geheel zijn, meer bepaald uit het geheel zijn van (4.14). De enige waarden $t_3$ die aan voorwaarden (5.4), (5.5) en (5.7) voldoen zijn 32, 38 en 90:

| $t_3$ | $K$ |
|---|---|
| 32 | 64 |
| 38 | 76 |
| 90 | 180 |

We weten dat $K \leq R \leq s^2 + 1 = 17$. Voor deze waarden vinden we hieruit ook een strijdigheid. Hier hebben we enkel ons al bekende grenzen en voorwaarden gebruikt, zonder de assumpties uit het gegeven in acht te nemen. Het geval $(s, t_2) = (4, 2)$ kan zich dus nooit voordoen. We kunnen in het vervolg dus veronderstellen dat $t_2 > 2$.

We weten dus dat als $s = t_2^2$, $R > K + 1$ en $t_3 \geq s^2\frac{t_2+1}{t_2-1}$, dan moet $K = m(m-1)$ waaruit volgt dat $R = m^2$. Uit $R \leq s^2 + 1$ vinden we dat $m \leq s = t_2^2$. Uit (5.3) halen we

$$m(m-1) = K \geq t_2^4 - t_2^2 - t_2 - 7.$$

Als $m \leq t_2^2 - 1$, dan is echter

$$m(m-1) \leq (t_2^2-1)(t_2^2-2) = t_2^4 - 3t_2^2 + 2.$$

Uit de twee bovenstaande ongelijkheden vinden we $0 \leq -2t_2^2 + t_2 + 9$. Dit kan enkel als $t_2 \leq 2$. We vinden hier een strijdigheid. We hebben dus $m > t_2^2 - 1$ dus $m = s$. Hieruit halen we $K = s^2 - s$ en $t_3 = t_2K = t_2^3(t_2^2 - 1)$. Met $t_2 = q$ krijgen we dan $(s, t_2, t_3) = (q^2, q, q^5 - q^3)$. Bekijken we een hex in de schierachthoek, dan wordt de multipliciteit van de eigenwaarde $-t_3 - 1$ dankzij (4.14) hier

$$\begin{aligned} \frac{\left(1 + st_3 + \frac{s^2t_3(t_3-t_2)}{t_2+1}\right)s^3(t_2+1)}{s^2(t_2+1) + st_3(t_2+1) + t_3(t_3-t_2)} &= \frac{q^6(q+1)\left(1 + q^2(q^5-q^3) + \frac{q^4(q^5-q^3)(q^5-q^3-q)}{1+q}\right)}{q^4(q+1) + q^2(q^5-q^3)(q+1) + (q^5-q^3)(q^5-q^3-q)} \\ &= \frac{q^{20} - 2q^{18} + 2q^{14} + q^{13} - q^{12} - q^{11} + q^7 + q^6}{q^{10} - q^8 + q^7 - q^6 + 2q^4} \end{aligned}$$

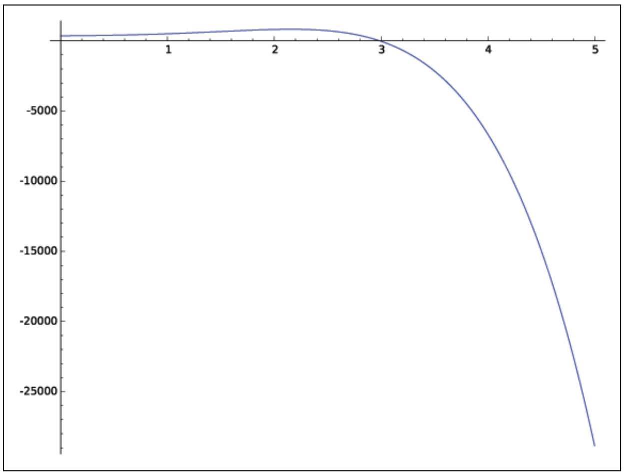
$$= q^{10} - q^8 - q^7 + q^2 + q + 1 + \frac{q^3 - 2}{q^5 - q^4 + q^2 - 2q + 2}.$$

In de breuk uit de laatste uitdrukking is voor elke waarde $q$ de teller kleiner dan de noemer, dus vinden we enkel een gehele waarde als de breuk gelijk is aan 0, dus als de teller gelijk is aan 0. De teller heeft echter geen gehele nulpunten. We vinden opnieuw een strijdigheid. We vinden dus dat $t_3 < s^2 \frac{t_2+1}{t_2-1}$ als $s = t_2^2$ en $R > K + 1$. Dit bewijst het lemma. $\square$

De gevallen $R = K$ en $R = K + 1$ hebben we al afgehandeld. De enige overblijvende mogelijke tegenvoorbeelden voor Stelling 5.1 voldoen dus aan $s = t_2^2$ en $t_3 < s^2 \frac{t_2+1}{t_2-1}$. Als we het bewijs van Lemma 5.9 bekijken, dan zien we dat strengere bovengrenzen $M$ voor $t_3$ aan twee voorwaarden moeten voldoen. Als eerste moet $M \leq s^2 \frac{t_2+1}{t_2-1}$. Als tweede moet (4.13) negatief worden als we $t_3$ hierin vervangen door $M$. We schrijven $q := t_2$. Voorwaarde (4.13) wordt dan

$$0 \leq t_3^2 - (q^5 + q^4 + q)t_3 + q^9 + q^8 =: g(t_3).$$

Voor $t_3 = q^4 + q^3 + q^2 + 2q + 19$ wordt $g(t_3) = -16q^5 + 23q^4 + 41q^3 + 40q^2 + 57q + 361$. Deze uitdrukking is kleiner dan 0 voor $q \geq 3$, wat we zien in Figuur 5.8.




Figuur 5.8: Plot van $-16q^5 + 23q^4 + 41q^3 + 40q^2 + 57q + 361$ met $q \in [0, 5]$

We vinden ook dat $q^4 + q^3 + q^2 + 2q + 19 \leq q^4 \frac{q+1}{q-1}$ als $q \geq 3$. We bekomen zo een strengere bovengrens voor $t_3$ als $q \geq 3$ namelijk

$$t_3 \leq q^4 + q^3 + q^2 + 2q + 18.$$

Anderzijds geldt $t_3 \geq (1 + t_2)(1 + st_2)$ en moet $t_2 | t_3$, dus krijgen we

$$\begin{aligned} \frac{t_3}{t_2} &\geq \left\lceil \frac{(q+1)(q^3+1)}{q} \right\rceil = q^3 + 1 + q^2 + \left\lceil \frac{1}{q} \right\rceil = q^3 + q^2 + 2, \\ t_3 &\geq q^4 + q^3 + 2q. \end{aligned}$$

We zoeken eerst een strengere ondergrens voor $t_3$.

**Lemma 5.11.** *Stel $H$ een niet-klassieke, reguliere schierzeshoek met parameters $s > 1$, $t_2 \geq 1$ en $t_3$, met $(s, t_2, t_3) \neq (2, 2, 14)$. Neem $t_2' \in \mathbb{N}$ zodanig dat geen enkel quad in $H$ deelvierhoeken heeft met parameters $(s, \alpha)$ voor $t_2' < \alpha \leq \frac{t_2-1}{s}$. Dan is $t_3 = (st_2+1)(t_2+1) + \eta t_2$ met $\eta \geq \max\{t_2, \frac{(1+t_2)(1+st_2)}{1+st_2'} - (st_2+s+1)\}$.*

**Bewijs.** Doordat $(s, t_2, t_3) \neq (2, 2, 14)$, weten we dat $1 + t_3 > (1 + t_2)(1 + st_2)$. Doordat $t_2 | t_3$, weten we ook dat er moet gelden dat $1 + t_3 = (1 + t_2)(1 + st_2) + \eta t_2$. Stel $Q$ een willekeurig quad in $H$, dan is er een punt $x$ in $\Gamma_2(Q)$, want $H$ is niet klassiek. Het aantal rechten door $x$ dat een punt van $\Gamma_1(Q)$ bevat, is gelijk aan $(1 + t_2)(1 + st_2)$. Het punt $x$ is immers sowieso ovoïdaal ten opzichte van $Q$, dus het aantal rechten dat een punt op afstand 1 van $Q$ bevat, vinden we door voor elk punt $z$ van de ovoïde (zo zijn er

$1+st_2$) de rechten door $x$ te nemen die een buur van $z$ bevatten. Zo zijn er $1+t_2$ per punt $z$. Doordat nu $1+t_3 > (1+t_2)(1+st_2)$, vinden we echter nog een rechte $L$ door $x$ die geen punten van $\Gamma_1(Q)$ bevat. $L$ ligt bijgevolg in $\Gamma_2(Q)$. Stel $V$ gelijk aan de verzameling rechten die $L$ raken en een punt van $\Gamma_1(Q)$ bevatten, dan is $|V| = (s+1)(1+t_2)(1+st_2)$. Dit vinden we door de redenering van het punt $x$ toe te passen op elk punt van $L$. Stel voor elk quad $Q'$ door $L$ de verzameling $V_{Q'}$ gelijk aan de rechten in $V \bigcap Q'$. Doordat er $\frac{t_3}{t_2}$ quads door $L$ gaan, vinden we zeker een quad $Q^*$ waarvoor $|V_{Q^*}|$ groter of gelijk is aan het gemiddeld aantal rechten per quad $\frac{(s+1)(1+t_2)(1+st_2)t_2}{t_3}$. Dit vinden we gemakkelijk door koppels $(M, Q')$ te tellen, met $M \in V$, $M \in Q'$ en $L \in Q'$.

Stel $X := Q \bigcup \Gamma_1(Q)$, dan is elke rechte die twee punten bevat in $X$ volledig bevat in $X$. Inderdaad, indien de rechte twee punten van $Q$ bevat, dan is de rechte bevat in $Q$ doordat $Q$ geodetisch gesloten is. Een rechte die punten van $Q$ en punten op afstand 1 van $Q$ bevat, bestaat uit één punt van $Q$ en $s$ punten van $\Gamma_1(Q)$. Een rechte die twee punten van $\Gamma_1(Q)$ bevat, is ofwel parallel aan een rechte van $Q$ (en bevat dus enkel punten van $\Gamma_1(Q)$), of bevat één punt uit $Q$ en $s$ punten uit $\Gamma_1(Q)$. Voor een quad $Q'$ door $L$ vinden we hierdoor dat $Q' \bigcap X$ voldoet aan één van de volgende gevallen.

- $Q' \bigcap X$ is een (mogelijks lege) verzameling van niet-collineaire punten. In dit geval is $|V_{Q'}| = |Q' \bigcap X| \leq st_2$. De grootst mogelijke verzameling niet-collineaire punten in $Q'$ is immers een ovoïde met grootte $1+st_2$, en we weten dat er geen van deze niet-collineaire punten op $L$ ligt.
- $Q' \bigcap X$ is een verzameling van $k$ rechten door een specifiek punt $z$. In dit geval is $|V_{Q'}| = 1+sk$. Doordat er hoogstens $t_2+1$ rechten in $Q'$ door $z$ gaan, en één van deze rechten een punt van $L$ bevat, vinden we dat er hoogstens $t_2$ rechten in $Q' \bigcap X$ liggen, dus $|V_{Q'}| \leq 1+st_2$.
- $Q' \bigcap X$ is een deelvierhoek met orde $(s, \alpha)$. Doordat $Q'$ de rechte $L$ bevat die geen punten gemeen heeft met deze deelvierhoek, vinden we dankzij Lemma 4.21 dat $\alpha \leq \frac{t_2-1}{s}$. Door de aannames in het gegeven, is $\alpha \leq t_2'$. Hieruit vinden we $|V_{Q'}| = (s+1)(s\alpha+1) \leq (s+1)(st_2'+1)$.

Stellen we $Q' = Q^*$, dan vinden we

$$\begin{aligned}
\frac{(s+1)(1+t_2)(1+st_2)t_2}{t_3} &\leq st_2+1 \\
(s+1)(1+t_2)t_2 &\leq t_3 = st_2^2+st_2+t_2+\eta t_2 \\
s+st_2+1+t_2 &\leq st_2+s+1+\eta \\
t_2 &\leq \eta
\end{aligned}$$

ofwel

$$\begin{aligned}
\frac{(s+1)(1+t_2)(1+st_2)t_2}{t_3} &\leq (s+1)(st_2'+1) \\
\frac{(1+t_2)(1+st_2)t_2}{st_2'+1} &\leq t_3 = st_2^2+st_2+t_2+\eta t_2 \\
\frac{(1+t_2)(1+st_2)}{st_2'+1} &\leq st_2+s+1+\eta \\
\frac{(1+t_2)(1+st_2)}{st_2'+1} - (st_2+s+1) &\leq \eta.
\end{aligned}$$

We kunnen dus besluiten dat $\eta \geq \max\{t_2, \frac{(1+t_2)(1+st_2)}{1+st_2'} - (st_2+s+1)\}$. □

Stel nu dat voor elk quad in $H$ geldt dat er geen deelvierhoeken zijn van orde $(s, \alpha)$ met $\alpha \leq \frac{t_2-1}{s}$, dan geldt volgens het lemma dat $\eta \geq t_2$, dus

$$t_3 \geq st_2^2+st_2+t_2+t_2^2 = (s+1)t_2(t_2+1).$$

Terugkerend naar ons geval geldt $s = t_2^2$. Als er voor een quad $Q$ in $H$ een deelvierhoek zou bestaan van orde $(s, \alpha)$ met $\alpha \leq \frac{t_2-1}{s}$, dan vinden we $\alpha \leq \frac{t_2-1}{t_2^2} < 1$ voor elke mogelijke $t_2$. In ons geval wordt de nieuwe ondergrens voor $t_3$ dus

$$t_3 \geq (s+1)t_2(1+t_2) = q(1+q)(1+q^2) = q^4+q^3+q^2+q.$$

We splitsen ons probleem op in de gevallen $t_3 = q^4+q^3+q^2+q$, $t_3 = q^4+q^3+q^2+2q$ en $q^4+q^3+q^2+3q \leq t_3 \leq q^4+q^3+q^2+2q+18$.

**Lemma 5.12.** *Het geval $t_3 = q^4 + q^3 + q^2 + q$ kan niet voorkomen.*

**Bewijs.** De multipliciteit van de eigenwaarde $-(t_3 + 1)$ in $H$ wordt

$$
\begin{aligned}
f(-(t_3+1)) &= \frac{(s+1)(1+st_3+\frac{s^2t_3(t_3-t_2)}{t_2+1})s^3(t_2+1)}{(s+1)((1+t_2)s^2+(1+t_2)st_3+t_3(t_3-t_2))} \\
&= \frac{\left(1+st_3+\frac{s^2t_3(t_3-t_2)}{t_2+1}\right)s^3(t_2+1)}{(1+t_2)s^2+(1+t_2)st_3+t_3(t_3-t_2)} \\
&= \frac{\left(1+q^2(q^4+q^3+q^2+q)+\frac{q^4(q^4+q^3+q^2+q)(q^4+q^3+q^2)}{q+1}\right)q^6(q+1)}{(1+q)q^4+(1+q)q^2(q^4+q^3+q^2+q)+(q^4+q^3+q^2+q)(q^4+q^3+q^2)} \\
&= \frac{(q^{11}+q^{10}+2q^9+q^8+q^7+q^6+q^5+q^4+q^3+1)q^6(q+1)}{q^8+3q^7+5q^6+6q^5+5q^4+2q^3} \\
&= \frac{q^{18}+2q^{17}+3q^{16}+3q^{15}+2q^{14}+2q^{13}+2q^{12}+2q^{11}+2q^{10}+q^9+q^7+q^6}{q^8+3q^7+5q^6+6q^5+5q^4+2q^3} \\
&= q^{10}-q^9+q^8-q^7+q^6+q^5-3q^4+3q^3-q^2+\frac{-2q^7+2q^5}{q^8+3q^7+5q^6+6q^5+5q^4+2q^3} \\
&= q^{10}-q^9+q^8-q^7+q^6+q^5-3q^4+3q^3-q^2+\frac{-2q^4+2q^2}{q^5+3q^4+5q^3+6q^2+5q+2}
\end{aligned}
$$

Deze multipliciteit is enkel geheel als $q = 0$ of $q = 1$. Voor $q \geq 2$ is immers $|-2q^4 + 2q^2| \leq |q^5 + 3q^4 + 5q^3 + 6q^2 + 5q + 2|$. Dit wil echter zeggen dat $t_2 = 0$ of $t_2 = 1$, wat een strijdigheid oplevert. □

**Lemma 5.13.** *Het geval $t_3 = q^4 + q^3 + q^2 + 2q$ kan niet voorkomen.*

**Bewijs.** In dit geval wordt de multipliciteit van de eigenwaarde $-(t_3 + 1)$ in $H$ gelijk aan

$$
\begin{aligned}
f(-(t_3+1)) &= \frac{(s+1)(1+st_3+\frac{s^2t_3(t_3-t_2)}{t_2+1})s^3(t_2+1)}{(s+1)((1+t_2)s^2+(1+t_2)st_3+t_3(t_3-t_2))} \\
&= \frac{\left(1+st_3+\frac{s^2t_3(t_3-t_2)}{t_2+1}\right)s^3(t_2+1)}{(1+t_2)s^2+(1+t_2)st_3+t_3(t_3-t_2)} \\
&= \frac{\left(1+q^2(q^4+q^3+q^2+2q)+\frac{q^4(q^4+q^3+q^2+2q)(q^4+q^3+q^2+q)}{q+1}\right)q^6(q+1)}{(1+q)q^4+(1+q)q^2(q^4+q^3+q^2+2q)+(q^4+q^3+q^2+2q)(q^4+q^3+q^2+q)} \\
&= \frac{q^{18}+2q^{17}+3q^{16}+5q^{15}+4q^{14}+4q^{13}+4q^{12}+2q^{11}+3q^{10}+2q^9+q^7+q^6}{q^8+3q^7+5q^6+8q^5+8q^4+5q^3+2q^2} \\
&= q^{10}-q^9+q^8-q^7+2q^6-2q^5+3q^4-8q^3+15q^2-19q+28 \\
&+ \frac{-55q^7-73q^6-131q^5-159q^4-102q^3-56q^2}{q^8+3q^7+5q^6+8q^5+8q^4+5q^3+2q^2}. \\
&= q^{10}-q^9+q^8-q^7+2q^6-2q^5+3q^4-8q^3+15q^2-19q+28 \\
&+ \frac{-55q^5-73q^4-131q^3-159q^2-102q-56}{q^6+3q^5+5q^4+8q^3+8q^2+5q+2}.
\end{aligned}
$$

Deze multipliciteit is enkel geheel als de breuk op het einde geheel is. De teller heeft geen positieve nulpunten. Voor $q > 53$ geldt

$$0 < |-55q^5 - 73q^4 - 131q^3 - 159q^2 - 102q - 56| < q^6 + 3q^5 + 5q^4 + 8q^3 + 8q^2 + 5q + 2.$$

We vinden dat $0 \leq q \leq 53$. De enige waarden $q \leq 53$ waarvoor de breuk een geheel getal wordt, zijn $q = 1$ en $q = 2$. Dit levert ons echter de waarden $t_2 = 1$ en $t_2 = 2$. Deze waarden waren al uitgesloten, waardoor we kunnen besluiten dat dit geval niet kan voorkomen. □

**Lemma 5.14.** *Het geval $q^4 + q^3 + q^2 + 3q \leq t_3 \leq q^4 + q^3 + q^2 + 2q + 18$ kan niet voorkomen*

**Bewijs.** Als $q \geq 6$, dan is $q^4 + q^3 + q^2 + 2q + 6 \leq q^4 + q^3 + q^2 + 3q \leq t_3$. In (4.13) krijgen we

$$f(q^4 + q^3 + q^2 + 2q + 6) = -3q^5 + 10q^4 + 15q^3 + 14q^2 + 18q + 36 \leq 0$$

als $q \geq 6$. Doordat $q^4 + q^3 + q^2 + 2q + 6 \leq \frac{q^4(q+1)}{q-1}$ voor $q > 1$ (dus ook voor $q \geq 6$), zien we dat $q^4 + q^3 + q^2 + 2q + 6$ een bovengrens is van $t_3$. Hieruit volgt dus dat $t_3 < q^4 + q^3 + q^2 + 2q + 6$, strijdig met het gegeven. We moeten nu enkel nog te gevallen $q < 6$ bekijken.

Voor $q = 5$ wordt $f(t_3) = t_3^2 - 3755t_3 + 2343750$ waaruit we vinden dat $t_3 \leq 790$. Uit het gegeven halen we $t_3 \geq q^4 + q^3 + q^2 + 3q = 790$, dus moet $t_3 = 790$. Hiervoor wordt de voorwaarde $t_2(t_2+1)|t_3(t_3+1)$ gelijk aan $30|624890$, een strijdigheid.

Voor $q = 4$ wordt $f(t_3) = t_3^2 - 1284t_3 + 327680$ waaruit we vinden dat $t_3 \leq 351$. De ondergrens uit het gegeven wordt 348. De voorwaarde $t_2|t_3$ sluit alle mogelijkheden uit behalve $t_3 = 348$. Hiervoor wordt de voorwaarde $t_2(t_2+1)|t_3(t_3+1)$ gelijk aan $20|121452$, een strijdigheid.

Voor $q = 3$ wordt $f(t_3) = t_3^2 - 327t_3 + 26244$ waaruit we vinden dat $t_3 \leq 141$. De ondergrens uit het gegeven wordt 126. De voorwaarde $t_2|t_3$ houdt enkel $t_3 \in \{126, 129, 132, 135, 138, 141\}$ over. De voorwaarde $t_2(t_2+1)|t_3(t_3+1)$ sluit alle gevallen uit behalve $t_3 \in \{132, 135\}$. Voor $t_3 = 132$ wordt de multipliciteit van de eigenwaarde $-(t_3+1)$ gelijk aan

$$\frac{(s+1)(1 + st_2 + \frac{s^2t_3(t_3-t_2)}{t_2+1})s^3(t_2+1)}{(s+1)((1+t_2)s^2 + (1+t_2)st_3 + t_3(t_3-t_2))} = \frac{173003}{11052}.$$

Dit is geen gehele waarde. Voor $t_3 = 135$ krijgen we voor diezelfde multipliciteit

$$\frac{(s+1)(1 + st_2 + \frac{s^2t_3(t_3-t_2)}{t_2+1})s^3(t_2+1)}{(s+1)((1+t_2)s^2 + (1+t_2)st_3 + t_3(t_3-t_2))} = \frac{362071}{23004},$$

wat opnieuw geen gehele waarde is. □

# Hoofdstuk 6

# Bestaansvoorwaarden voor veralgemeende veelhoeken

Veralgemeende veelhoeken zijn specifieke gevallen van schierveelhoeken. Met behulp van de voorwaarden op parameters die we al vonden voor schierveelhoeken en de specifieke parameters van veralgemeende veelhoeken, kunnen we nu voorwaarden vinden op de diameter van veralgemeende veelhoeken.

## 1 Definities

We definiëren eerst wat een veralgemeende veelhoek is.

**Definitie 6.1.** *Een veralgemeende $n$-hoek is een reguliere schier-$n$-hoek met de volgende parameters:*

- *als $n = 2d$ even is, is $t_i = 0$ voor $1 \leq i < d$ en $t_d = t$,*
- *als $n = 2d + 1$ oneven is, is $t_i = 0$ voor $1 \leq i \leq d$.*

We geven ook de uitdrukkingen voor de parameters $a_i, b_i, c_i$, $0 \leq i \leq d$ van de collineariteitsgraaf van een veralgemeende veelhoek, rekening houdend met wat we al weten over schierveelhoeken.

**Lemma 6.2.** *De collineariteitsgraaf van een veralgemeende $2d$-hoek is een afstandsreguliere graaf met de volgende parameters:*

- $c_i = t_i + 1 = 1$ *als* $1 \leq i < d$,
- $a_i = (s-1)(t_i + 1) = s - 1$ *als* $1 \leq i < d$,
- $b_i = s(t - t_i) = st$ *als* $1 \leq i < d$,
- $b_d = 0$,
- $c_d = t + 1$,
- $a_d = (s-1)(t+1)$.

*De collineariteitsgraaf van een veralgemeende $2d+1$-hoek is een afstandsreguliere graaf met de volgende parameters:*

- $c_i = 1$ *als* $1 \leq i \leq d$,
- $s = t$,
- $b_i = st$ *als* $1 \leq i < d$,
- $b_d = 0$,
- $a_i = s - 1$ *als* $1 \leq i < d$,

- $a_d = s^2 + s - 1$.

**Bewijs.** Het bepalen van de parameters $a_i$, $b_i$ en $c_i$ met $1 \leq i \leq d$ volgt uit wat we al weten over schierveelhoeken en de definitie van een veralgemeende $n$-hoek. In een veralgemeende $2d+1$-hoek vinden we nu een punt $p$ en een rechte $l$ zodanig dat elk punt op $l$ op afstand $d$ van $p$ ligt. Doordat $t_d = 0$, vinden we voor elk punt $q$ op $l$ een rechte door $p$ die een punt bevat op afstand $d-1$ van $q$. Als er een rechte $m$ door $p$ zou zijn die we zo twee keer bereiken, dan bevat $m$ twee (eventueel verschillende) punten elk op afstand $d-1$ van een punt op $l$. Als deze punten op $m$ samenvallen, vinden we geen uniek punt op $l$ het dichtst bij dit punt op $m$, strijdig met de definitie van een schierveelhoek. Als de punten op $m$ niet samenvallen, dan is $m$ parallel aan $l$ of bevat $m$ een punt op afstand $d-2$ van $l$. In beide gevallen ligt $p$ op afstand $d-1$ van $l$, strijdig met onze aannames. Er is dus een bijectie tussen de punten van $l$ en de rechten door $p$. Dit kan enkel als $s = t$. Dit bewijst het volledige lemma. □

Het voornaamste doel van dit hoofdstuk is het bewijzen van de bestaansvoorwaarden geformuleerd in het Lemma van Feit en Higman. Deze voorwaarden worden in de volgende stelling geformuleerd.

**Stelling 6.3.** *Voor een eindige, reguliere, veralgemeende $n$-hoek van orde $(s,t)$ is $n \in \{3,4,6,8,12\}$ tenzij $s = t = 1$. Als $s > 1$ en $t > 1$ geldt*

1. $n \neq 12$,
2. *als* $n = 4$, *dan is* $s \leq t^2$ *en* $t \leq s^2$,
3. *als* $n = 6$, *dan is* $st$ *een kwadraat en* $s \leq t^3$ *en* $t \leq s^3$,
4. *als* $n = 8$, *dan is* $2st$ *een kwadraat en* $s \leq t^2$ *en* $t \leq s^2$.

## 2 Resultaten onafhankelijk van de diameter $d$

We noemen de collineariteitsgraaf van de veralgemeende veelhoek $\Gamma$. Deze graaf heeft als diameter $\lfloor n/2 \rfloor$. We noteren de adjacentiematrix van $\Gamma$ als $A$.

**Lemma 6.4.** *Als $\theta$ een eigenwaarde is van $A$, en we kiezen $\eta$ zo dat*

$$\theta = \sqrt{st}(\eta + \eta^{-1}) + s - 1,$$

*dan geldt voor* $0 \leq l \leq d$ *dat*

$$u_l(\theta) = \frac{t(\eta^{l+1} - \eta^{-l-1}) + (s-1)\sqrt{s^{-1}t}(\eta^l - \eta^{-l}) - (\eta^{l-1} - \eta^{-l+1})}{(1+t)(\eta - \eta^{-1})(\sqrt{st})^l}. \tag{6.1}$$

**Bewijs.** Om dit in te zien overlopen we de recursiebetrekking (2.2) waaraan $u_l(\theta)$ voldoet. We merken ook al op dat voor getallen $\eta$ waarvoor deze recursiebetrekking geldt, altijd $\eta^2 - 1 \neq 0$ moet zijn.

Allereerst is $u_0(\theta) = 1$. Vervangen we in de vorige betrekking $l$ door 0, dan krijgen we

$$\begin{aligned} u_0(\theta) &= \frac{t(\eta - \eta^{-1}) + (s-1)\sqrt{s^{-1}t}(\eta^0 - \eta^0) - (\eta^{-1} - \eta)}{(1+t)(\eta - \eta^{-1})} \\ &= \frac{(t+1)(\eta - \eta^{-1})}{(1+t)(\eta - \eta^{-1})} = 1. \end{aligned}$$

Als tweede moet $u_1(\theta) = \theta/k$. We zien we dat

$$\begin{aligned} u_1(\theta) &= \frac{t(\eta^2 - \eta^{-2}) + (s-1)\sqrt{s^{-1}t}(\eta - \eta^{-1}) - (\eta^0 - \eta^0)}{(1+t)(\eta - \eta^{-1})(\sqrt{st})} \\ &= \frac{t(\eta^2 - \eta^{-2}) + (s-1)\sqrt{s^{-1}t}(\eta - \eta^{-1})}{(1+t)(\eta - \eta^{-1})(\sqrt{st})} \\ &= (\eta - \eta^{-1})\frac{t(\eta + \eta^{-1}) + (s-1)\sqrt{s^{-1}t}}{(1+t)(\eta - \eta^{-1})\sqrt{st}}, \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
u_1(\theta) &= \frac{t(\eta+\eta^{-1})+(s-1)\sqrt{s^{-1}t}}{(1+t)\sqrt{st}} \\
&= \frac{\sqrt{st}(\eta+\eta^{-1})+s-1}{(1+t)s} \\
&= \frac{\theta}{k}.
\end{aligned}
$$

De te bewijzen recursiebetrekking (2.2) is

$$\theta u_i(\theta) = b_i u_{i+1}(\theta) + a_i u_i(\theta) + c_i u_{i-1}(\theta).$$

Schrijven we deze betrekking in termen van $s$, $t$ en $\eta$, dan krijgen we voor $1 \le i < d$

$$
\begin{aligned}
&(\sqrt{st}(\eta+\eta^{-1})+s-1)\frac{t(\eta^{i+1}-\eta^{-i-1})+(s-1)\sqrt{s^{-1}t}(\eta^i-\eta^{-i})-(\eta^{i-1}-\eta^{-i+1})}{(1+t)(\eta-\eta^{-1})(\sqrt{st})^i} \\
=&st\frac{t(\eta^{i+2}-\eta^{-i-2})+(s-1)\sqrt{s^{-1}t}(\eta^{i+1}-\eta^{-i-1})-(\eta^i-\eta^{-i})}{(1+t)(\eta-\eta^{-1})(\sqrt{st})^{i+1}} \\
&+(s-1)\frac{t(\eta^{i+1}-\eta^{-i-1})+(s-1)\sqrt{s^{-1}t}(\eta^i-\eta^{-i})-(\eta^{i-1}-\eta^{-i+1})}{(1+t)(\eta-\eta^{-1})(\sqrt{st})^i} \\
&+\frac{t(\eta^i-\eta^{-i})+(s-1)\sqrt{s^{-1}t}(\eta^{i-1}-\eta^{-i+1})-(\eta^{i-2}-\eta^{-i+2})}{(1+t)(\eta-\eta^{-1})(\sqrt{st})^{i-1}}.
\end{aligned}
$$

Het rechterlid van deze vergelijking kunnen we schrijven als

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{(1+t)(\eta-\eta^{-1})\sqrt{st}^{i-1}}(t(\eta^{i+2}-\eta^{-i-2})+(s-1)\sqrt{s^{-1}t}(\eta^{i+1}-\eta^{-i-1})-(\eta^i-\eta^{-i}) \\
&+\frac{s-1}{\sqrt{st}}(t(\eta^{i+1}-\eta^{-i-1})+(s-1)\sqrt{s^{-1}t}(\eta^i-\eta^{-i})-(\eta^{i-1}-\eta^{-i+1})) \\
&+t(\eta^i-\eta^{-i})+(s-1)\sqrt{s^{-1}t}(\eta^{i-1}-\eta^{-i+1})-(\eta^{i-2}-\eta^{-i+2})) \\
=&\frac{1}{(1+t)(\eta-\eta^{-1})\sqrt{st}^{i-1}}\left(-(\eta^{i-2}-\eta^{-i+2})+(s-1)\left(\sqrt{s^{-1}t}-\frac{1}{\sqrt{st}}\right)(\eta^{i-1}-\eta^{-i+1})\right. \\
&\left.+\left(t+\frac{(s-1)^2}{s}-1\right)(\eta^i-\eta^{-i})+(s-1)\left(\frac{t}{\sqrt{st}}+\sqrt{s^{-1}t}\right)(\eta^{i+1}-\eta^{-i-1})+t(\eta^{i+2}-\eta^{-i-2})\right).
\end{aligned}
$$

Het linkerlid wordt

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{(1+t)(\eta-\eta^{-1})\sqrt{st}^i}(\sqrt{st}t(\eta^{i+1}-\eta^{-i-1})(\eta+\eta^{-1})+(s-1)t(\eta^i-\eta^{-i})(\eta+\eta^{-1})-\sqrt{st}(\eta^{i-1}-\eta^{-i+1})(\eta+\eta^{-1}) \\
&+(s-1)t(\eta^{i+1}-\eta^{-i-1})+(s-1)^2\sqrt{s^{-1}t}(\eta^i-\eta^{-i})-(s-1)(\eta^{i-1}-\eta^{-i+1})) \\
=&\frac{1}{(1+t)(\eta-\eta^{-1})\sqrt{st}^i}(\sqrt{st}t(\eta^{i+2}-\eta^{-i-2})+\sqrt{st}t(\eta^i-\eta^{-i})+(s-1)t(\eta^{i+1}-\eta^{-i-1}) \\
&+(s-1)t(\eta^{i-1}-\eta^{-i+1})-\sqrt{st}(\eta^i-\eta^{-i})-\sqrt{st}(\eta^{i-2}-\eta^{-i+2})+(s-1)t(\eta^{i+1}-\eta^{-i-1}) \\
&+(s-1)^2\sqrt{s^{-1}t}(\eta^i-\eta^{-i})-(s-1)(\eta^{i-1}-\eta^{-i+1})) \\
=&\frac{1}{(1+t)(\eta-\eta^{-1})\sqrt{st}^i}\left(\sqrt{st}t(\eta^{i+2}-\eta^{-i-2})+2(s-1)t(\eta^{i+1}-\eta^{-i-1})+\sqrt{st}\left(t-1+\frac{(s-1)^2}{s}\right)(\eta^i-\eta^{-i})\right. \\
&\left.+(s-1)(t-1)(\eta^{i-1}-\eta^{-i+1})-\sqrt{st}(\eta^{i-2}-\eta^{-i+2})\right).
\end{aligned}
$$

Linker- en rechterlid zijn dus aan elkaar gelijk als

$$
\begin{aligned}
0 =& \left(t - \frac{\sqrt{st}t}{\sqrt{st}}\right)(\eta^{i+2} - \eta^{-i-2}) + \left(2\sqrt{s^{-1}t}(s-1) - \frac{2(s-1)t}{\sqrt{st}}\right)(\eta^{i+1} - \eta^{-i-1}) \\
&+ \left(t + \frac{(s-1)^2}{s} - 1 - \frac{\sqrt{st}}{\sqrt{st}}\left(t - 1 + \frac{(s-1)^2}{s}\right)\right)(\eta^{i} - \eta^{-i}) \\
&+ \left((s-1)\left(\sqrt{s^{-1}t} - \frac{1}{\sqrt{st}}\right) - \frac{(s-1)(t-1)}{\sqrt{st}}\right)(\eta^{i-1} - \eta^{-i+1}) + \left(-1 - \frac{-\sqrt{st}}{\sqrt{st}}\right)(\eta^{i-2} - \eta^{-i+2}) \\
=&(2\sqrt{s^{-1}t}(s-1) - 2\sqrt{s^{-1}t}(s-1))(\eta^{i+1} - \eta^{-i-1}) + \left(t + \frac{(s-1)^2}{s} - 1 - \left(t - 1 + \frac{(s-1)^2}{s}\right)\right)(\eta^{i} - \eta^{-i}) \\
&+ \left((s-1)\left(\frac{t}{\sqrt{st}} - \frac{1}{\sqrt{st}}\right) - \frac{(s-1)(t-1)}{\sqrt{st}}\right)(\eta^{i-1} - \eta^{-i+1}) + \left(-1 - \frac{-\sqrt{st}}{\sqrt{st}}\right)(\eta^{i-2} - \eta^{-i+2}).
\end{aligned}
$$

De recursiebetrekking geldt bijgevolg voor alle $i \in \{0, 1, ..., d-1\}$. Doordat ze geldt voor $i = d-1$, klopt de uitdrukking (6.1) ook voor $i = d$. $\square$

Voor $i = d$ wordt (2.2) (rekening houdend met $b_d = 0$):

$$c_d u_{d-1}(\theta) = (\theta - k + c_d) u_d(\theta).$$

Vervangen we $u_{d-1}(\theta)$ en $u_d(\theta)$ door de gepaste uitdrukkingen, dan krijgen we

$$
\begin{aligned}
&c_d \frac{t(\eta^{d} - \eta^{-d}) + (s-1)\sqrt{s^{-1}t}(\eta^{d-1} - \eta^{-d+1}) - (\eta^{d-2} - \eta^{-d+2})}{(1+t)(\eta + \eta^{-1})\sqrt{st}^{d-1}} \\
&= (\theta - k + c_d)\frac{t(\eta^{d+1} - \eta^{-d-1}) + (s-1)\sqrt{s^{-1}t}(\eta^{d} - \eta^{-d}) - (\eta^{d-1} - \eta^{-d+1})}{(1+t)(\eta + \eta^{-1})\sqrt{st}^{d}},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&c_d \sqrt{st}(t(\eta^{d} - \eta^{-d}) + (s-1)\sqrt{s^{-1}t}(\eta^{d-1} - \eta^{-d+1}) - (\eta^{d-2} - \eta^{-d+2})) \\
&= (\theta - k + c_d)(t(\eta^{d+1} - \eta^{-d-1}) + (s-1)\sqrt{s^{-1}t}(\eta^{d} - \eta^{-d}) - (\eta^{d-1} - \eta^{-d+1})).
\end{aligned}
$$

We passen nu de gelijkheid $-(\eta^{d-2} - \eta^{-d+2}) = (\eta^{d} - \eta^{-d}) - (\eta + \eta^{-1})(\eta^{d-1} - \eta^{-d+1})$ toe:

$$
\begin{aligned}
&c_d \sqrt{st}(t(\eta^{d} - \eta^{-d}) + (s-1)\sqrt{s^{-1}t}(\eta^{d-1} - \eta^{-d+1}) + (\eta^{d} - \eta^{-d}) - (\eta + \eta^{-1})(\eta^{d-1} - \eta^{-d+1})) \\
&= (\theta - k + c_d)(t(\eta^{d+1} - \eta^{-d-1}) + (s-1)\sqrt{s^{-1}t}(\eta^{d} - \eta^{-d}) - (\eta^{d-1} - \eta^{-d+1})),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&c_d \sqrt{st}((t+1)(\eta^{d} - \eta^{-d}) + ((s-1)\sqrt{s^{-1}t} - (\eta + \eta^{-1}))(\eta^{d-1} - \eta^{-d+1})) \\
&= (\theta - k + c_d)(t(\eta^{d+1} - \eta^{-d-1}) + (s-1)\sqrt{s^{-1}t}(\eta^{d} - \eta^{-d}) - (\eta^{d-1} - \eta^{-d+1})),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&- t(\theta - k + c_d)(\eta^{d+1} - \eta^{-d-1}) + (c_d\sqrt{st}(t+1) - (\theta - k + c_d)(s-1)\sqrt{s^{-1}t})(\eta^{d} - \eta^{-d}) \\
&+ (c_d\sqrt{st}((s-1)\sqrt{s^{-1}t} - (\eta + \eta^{-1})) + (\theta - k + c_d))(\eta^{d-1} - \eta^{-d+1}) = 0.
\end{aligned}
$$

Uit de gelijkheid $(\eta^{d+1} - \eta^{-d-1}) - (\eta + \eta^{-1})(\eta^{d} - \eta^{-d}) + (\eta^{d-1} - \eta^{-d+1}) = 0$ volgt dat

$$-t(\theta - k + c_d)(\eta^{d+1} - \eta^{-d-1}) = -t(\theta - k)(\eta^{d+1} - \eta^{-d-1}) - c_d t((\eta + \eta^{-1})(\eta^{d} - \eta^{-d}) - (\eta^{d-1} - \eta^{-d+1})).$$

Hiermee wordt de vorige gelijkheid

$$
\begin{aligned}
&- t(\theta - k)(\eta^{d+1} - \eta^{-d-1}) + (c_d\sqrt{st}(t+1) - (\theta - k + c_d)(s-1)\sqrt{s^{-1}t} - c_d t((\eta + \eta^{-1}))(\eta^{d} - \eta^{-d}) \\
&+ (c_d\sqrt{st}((s-1)\sqrt{s^{-1}t} - (\eta + \eta^{-1})) + (\theta - k + c_d) + c_d t)(\eta^{d-1} - \eta^{-d+1}) = 0.
\end{aligned}
$$

We bekijken eerst de coëfficiënt van $\eta^{d} - \eta^{-d}$ en bewijzen dat deze gelijk is aan $-(\theta - k)(c_d + s - 1)\sqrt{s^{-1}t}$:

$$c_d\sqrt{st}(t+1) - (\theta - k + c_d)(s-1)\sqrt{s^{-1}t} - c_d t(\eta + \eta^{-1}) = -(\theta - k)(c_d + s - 1)\sqrt{s^{-1}t},$$

$$c_d\sqrt{st}t + c_d\sqrt{st} - (\theta-k)(s-1)\sqrt{s^{-1}t} - c_d(s-1)\sqrt{s^{-1}t} - c_dt(\eta+\eta^{-1}) = -(\theta-k)c_d\sqrt{s^{-1}t} - (\theta-k)(s-1)\sqrt{s^{-1}t},$$
$$c_d\sqrt{st}t + c_d\sqrt{st} - c_d(s-1)\sqrt{s^{-1}t} - c_dt(\eta+\eta^{-1}) = -(\theta-k)c_d\sqrt{s^{-1}t},$$
$$\sqrt{st}t + \sqrt{st} - (s-1)\sqrt{s^{-1}t} - t(\eta+\eta^{-1}) = -(\theta-k)\sqrt{s^{-1}t},$$
$$st + s - (s-1) - \sqrt{st}(\eta+\eta^{-1}) = -\theta + k.$$

Deze laatste gelijkheid klopt volgens Lemma 6.2 en als we $\theta$ in functie van $\eta$ schrijven. We kijken nu naar de coëfficiënt van $\eta^{d-1} - \eta^{-d+1}$ en we bewijzen dat deze gelijk is aan $-(\theta-k)(c_d-1)$:

$$c_d\sqrt{st}(s-1)\sqrt{s^{-1}t} - c_d\sqrt{st}(\eta+\eta^{-1}) + (\theta - k + c_d) + c_dt = -(\theta-k)(c_d-1),$$
$$c_dt(s-1) - c_d\sqrt{st}(\eta+\eta^{-1}) + (\theta-k) + c_d + c_dt = -(\theta-k)c_d + (\theta-k),$$
$$c_dt(s-1) - c_d\sqrt{st}(\eta+\eta^{-1}) + c_d + c_dt = -(\theta-k)c_d,$$
$$t(s-1) - \sqrt{st}(\eta+\eta^{-1}) + 1 + t = -\theta + k,$$
$$st - t - \sqrt{st}(\eta+\eta^{-1}) + 1 + t = -\sqrt{st}(\eta+\eta^{-1}) - (s-1) + st + s,$$
$$st - \sqrt{st}(\eta+\eta^{-1}) + 1 = -\sqrt{st}(\eta+\eta^{-1}) + 1 + st.$$

Als nu $\theta = k$, dan is $\eta = \sqrt{st}$. Inderdaad,

$$\sqrt{st}(\sqrt{st} + \frac{1}{\sqrt{st}}) + s - 1 = st + 1 + s - 1 = s(t+1) = k.$$

Als $\eta \neq \sqrt{st}$, kunnen we $\theta - k$ wegdelen. Als we beide leden vermenigvuldigen met $-1$, dan krijgen we

$$t(\eta^{d+1} - \eta^{-d-1}) + (c_d + s - 1)\sqrt{s^{-1}t}(\eta^d - \eta^{-d}) + (c_d - 1)(\eta^{d-1} - \eta^{-d+1}) = 0. \tag{6.2}$$

Voor we het probleem opsplitsen, drukken we de constanten $k_i$, $0 \leq i \leq d$ van de afstandsreguliere graaf uit in de parameters $s, t, t_i$ van de veralgemeende veelhoeken.

**Lemma 6.5.** *De constanten $k_i$, $1 \leq i \leq d$ voldoen aan volgende vergelijking:*

$$k_i = \frac{s^it^{i-1}(t+1)}{c_i}.$$

**Bewijs.** In Lemma 4.4 zagen we dat $k_i = \frac{s^i\prod_{j=0}^{i-1}(t-t_j)}{\prod_{j=1}^{i}(1+t_j)}$. Als $i < d$, dan is $t_j = 0$ voor elke $j \leq i$ en krijgen we

$$k_i = s^i(t+1)t^{i-1}.$$

Doordat $c_i = 1$ in dit geval, komt dit overeen met de formule in het lemma. Voor $i = d$ is $t_j = 0$ voor $j < i$ dus krijgen we

$$k_i = \frac{s^i(t+1)t^{i-1}}{1+t_d}.$$

In Lemma 6.2 zagen we dat $c_d = t_d + 1$. Ook in dit geval bekomen we dus de formule in het lemma. □

# 3 Het geval $n = 2d$

Als $n = 2d$, dan is $c_d = t + 1$, dus wordt (6.2) de gelijkheid

$$0 = t(\eta^{d+1} - \eta^{-d-1}) + (t + 1 + s - 1)\sqrt{s^{-1}t}(\eta^d - \eta^{-d}) + (t + 1 - 1)(\eta^{d-1} - \eta^{-d+1}),$$
$$0 = t(\eta^{d+1} - \eta^{-d-1}) + (t+s)\sqrt{s^{-1}t}(\eta^d - \eta^{-d}) + t(\eta^{d-1} - \eta^{-d+1}),$$
$$0 = t(\eta+\eta^{-1})(\eta^d - \eta^{-d}) + (t+s)\sqrt{s^{-1}t}(\eta^d - \eta^{-d}),$$
$$0 = (\eta^d - \eta^{-d})(t(\eta+\eta^{-1}) + (t+s)\sqrt{s^{-1}t}),$$
$$0 = (\eta^d - \eta^{-d})(\sqrt{st}(\eta+\eta^{-1}) + t + s).$$

Als $\sqrt{st}(\eta+\eta^{-1})+t+s=0$, dan is $\eta=-\sqrt{s^{-1}t}$. Inderdaad, we vinden

$$\sqrt{st}(\eta+\eta^{-1})+t+s=\sqrt{st}(-\sqrt{s^{-1}t}+-\sqrt{st^{-1}})+t+s=-s-t+t+s=0.$$

Dit komt overeen met

$$\theta=\sqrt{st}(-\sqrt{s^{-1}t}+-\sqrt{t^{-1}s})+s-1=-t-s+s-1=-t-1.$$

De andere wortels van de vergelijking ontstaan uit de vergelijking $\eta^d-\eta^{-d}=0$ en zijn dus $n$de eenheidswortels $e^{\frac{i2\pi l}{n}}=\cos(\frac{2\pi l}{n})+i\sin(\frac{2\pi l}{n})$ met $0\leq l<n$. De wortels 1 en $-1$ (respectievelijk overeenkomend met $l=0$ en $l=d$) mogen we hier uitsluiten, omdat we anders in de oorspronkelijke uitdrukkingen van $u_l(\theta)$ een nulpunt van de noemer bereiken. De bijbehorende eigenwaarde $\theta$ is dan

$$\begin{aligned}\theta&=\sqrt{st}\left(e^{\frac{i2\pi l}{n}}+e^{-\frac{i2\pi l}{n}}\right)+s-1\\&=\sqrt{st}\left(\cos\left(\frac{2\pi l}{n}\right)+i\sin\left(\frac{2\pi l}{n}\right)+\cos\left(-\frac{2\pi l}{n}\right)+i\sin\left(-\frac{2\pi l}{n}\right)\right)+s-1\\&=\sqrt{st}\left(\cos\left(\frac{2\pi l}{n}\right)+i\sin\left(\frac{2\pi l}{n}\right)+\cos\left(\frac{2\pi l}{n}\right)-i\sin\left(\frac{2\pi l}{n}\right)\right)+s-1\\&=2\sqrt{st}\cos\left(\frac{2\pi l}{n}\right)+s-1.\end{aligned}$$

Voor $l>d$ geldt dat $\cos\left(\frac{2\pi l}{n}\right)=\cos\left(\frac{2\pi(d-(l-d))}{n}\right)$ waardoor we enkel de eigenwaarden $\theta=2\sqrt{st}\cos\left(\frac{2\pi l}{n}\right)+s-1, 1\leq l\leq d-1$ overhouden. In Stelling 2.7 zien we dat $\sum_{j=0}^{d}k_ju_j(\theta)^2$ een rationaal getal moet zijn. Stel dat $\theta=s-1+2\sqrt{st}\cos(2\pi l/n)$. Eerst schrijven we $u_j(\theta)$ zo eenvoudig mogelijk neer:

$$\begin{aligned}u_j(\theta)=&\frac{t\left(\left(e^{\frac{i2\pi l}{n}}\right)^{j+1}-\left(e^{\frac{i2\pi l}{n}}\right)^{-j-1}\right)+(s-1)\sqrt{s^{-1}t}\left(\left(e^{\frac{i2\pi l}{n}}\right)^{j}-\left(e^{\frac{i2\pi l}{n}}\right)^{-j}\right)-\left(\left(e^{\frac{i2\pi l}{n}}\right)^{j-1}-\left(e^{\frac{i2\pi l}{n}}\right)^{-j+1}\right)}{(1+t)\left(\left(e^{\frac{i2\pi l}{n}}\right)-\left(e^{\frac{i2\pi l}{n}}\right)^{-1}\right)(\sqrt{st})^j}\\=&\frac{t2i\sin\left(\frac{2\pi l(j+1)}{n}\right)+(s-1)\sqrt{s^{-1}t}2i\sin\left(\frac{2\pi lj}{n}\right)-2i\sin\left(\frac{2\pi l(j-1)}{n}\right)}{(1+t)2i\sin\left(\frac{2\pi l}{n}\right)(\sqrt{st})^j}\\=&\frac{t\sin\left(\frac{2\pi l(j+1)}{n}\right)+(s-1)\sqrt{s^{-1}t}\sin\left(\frac{2\pi lj}{n}\right)-\sin\left(\frac{2\pi l(j-1)}{n}\right)}{(1+t)\sin\left(\frac{2\pi l}{n}\right)(\sqrt{st})^j}\\=&\frac{t\left(\sin\left(\frac{2\pi lj}{n}\right)\cos\left(\frac{2\pi l}{n}\right)+\cos\left(\frac{2\pi lj}{n}\right)\sin\left(\frac{2\pi l}{n}\right)\right)+(s-1)\sqrt{s^{-1}t}\sin\left(\frac{2\pi lj}{n}\right)}{(1+t)\sin\left(\frac{2\pi l}{n}\right)(\sqrt{st})^j}\\&-\frac{\sin\left(\frac{2\pi lj}{n}\right)\cos\left(\frac{2\pi l}{n}\right)-\cos\left(\frac{2\pi lj}{n}\right)\sin\left(\frac{2\pi l}{n}\right)}{(1+t)\sin\left(\frac{2\pi l}{n}\right)(\sqrt{st})^j}\\=&\frac{(t-1)\sin\left(\frac{2\pi lj}{n}\right)\cos\left(\frac{2\pi l}{n}\right)+(t+1)\cos\left(\frac{2\pi lj}{n}\right)\sin\left(\frac{2\pi l}{n}\right)+(s-1)\sqrt{s^{-1}t}\sin\left(\frac{2\pi lj}{n}\right)}{(1+t)\sin\left(\frac{2\pi l}{n}\right)(\sqrt{st})^j}\\=&\sin\left(\frac{2\pi lj}{n}\right)\frac{(t-1)\cos\left(\frac{2\pi l}{n}\right)+(s-1)\sqrt{s^{-1}t}}{(1+t)\sin\left(\frac{2\pi l}{n}\right)(\sqrt{st})^j}+\frac{\cos\left(\frac{2\pi lj}{n}\right)}{(\sqrt{st})^j}\\=&\sin(jx)\frac{(t-1)\cos(x)+(s-1)\sqrt{s^{-1}t}}{(1+t)\sin(x)(\sqrt{st})^j}+\frac{\cos(jx)}{(\sqrt{st})^j}.\end{aligned}$$

In de laatste gelijkheid noteren we $\frac{2\pi l}{n}$ als $x$. We kwadrateren de vorige uitdrukking:

$$u_j(\theta)^2=\sin^2(jx)\frac{(t-1)^2\cos^2(x)+(s-1)^2(s^{-1}t)+2(t-1)(s-1)\sqrt{s^{-1}t}\cos(x)}{(1+t)^2\sin^2(x)(st)^j}+\frac{\cos^2(jx)}{(st)^j}$$

$$
\begin{aligned}
&+ 2\sin(jx)\frac{(t-1)\cos(x)+(s-1)\sqrt{s^{-1}t}}{(1+t)\sin(x)(\sqrt{st})^j}\frac{\cos(jx)}{(\sqrt{st})^j} \\
=&\sin^2(jx)\frac{(t-1)^2\cos^2(x)+(s-1)^2(s^{-1}t)+2(t-1)(s-1)\sqrt{s^{-1}t}\cos(x)}{(1+t)^2\sin^2(x)(st)^j}+\frac{\cos^2(jx)}{(st)^j} \\
&+ 2\sin(jx)\cos(jx)\frac{(t-1)\cos(x)+(s-1)\sqrt{s^{-1}t}}{(1+t)\sin(x)(st)^j} \\
=&\sin^2(jx)\frac{(t-1)^2\cos^2(x)+(s-1)^2(s^{-1}t)+2(t-1)(s-1)\sqrt{s^{-1}t}\cos(x)}{(1+t)^2\sin^2(x)(st)^j}+\frac{1-\sin^2(jx)}{(st)^j} \\
&+ 2\sin(jx)\cos(jx)\frac{(t-1)\cos(x)+(s-1)\sqrt{s^{-1}t}}{(1+t)\sin(x)(st)^j} \\
=&\sin^2(jx)\left(\frac{(t-1)^2\cos^2(x)+(s-1)^2(s^{-1}t)+2(t-1)(s-1)\sqrt{s^{-1}t}\cos(x)}{(1+t)^2\sin^2(x)(st)^j}-\frac{1}{(st)^j}\right)+\frac{1}{(st)^j} \\
&+ 2\sin(jx)\cos(jx)\frac{(t-1)\cos(x)+(s-1)\sqrt{s^{-1}t}}{(1+t)\sin(x)(st)^j} \\
=&\sin^2(jx)\frac{(t-1)^2\cos^2(x)+(s-1)^2(s^{-1}t)+2(t-1)(s-1)\sqrt{s^{-1}t}\cos(x)-(1+t)^2\sin^2(x)}{(1+t)^2\sin^2(x)(st)^j} \\
&+\frac{1}{(st)^j}+2\sin(jx)\cos(jx)\frac{(t-1)\cos(x)+(s-1)\sqrt{s^{-1}t}}{(1+t)\sin(x)(st)^j}.
\end{aligned}
$$

We vermenigvuldigen vorige uitdrukking met $k_j$:

$$
\begin{aligned}
k_ju_j(\theta)^2 =&\sin^2(jx)\frac{s^jt^{j-1}(t+1)}{c_j}\frac{(t-1)^2\cos^2(x)+(s-1)^2(s^{-1}t)+2(t-1)(s-1)\sqrt{s^{-1}t}\cos(x)-(1+t)^2\sin^2(x)}{(1+t)^2\sin^2(x)(st)^j} \\
&+\frac{s^jt^{j-1}(t+1)}{c_j}\frac{1}{(st)^j}+2\sin(jx)\cos(jx)\frac{s^jt^{j-1}(t+1)}{c_j}\frac{(t-1)\cos(x)+(s-1)\sqrt{s^{-1}t}}{(1+t)\sin(x)(st)^j} \\
=&\sin^2(jx)\frac{(t-1)^2\cos^2(x)+(s-1)^2(s^{-1}t)+2(t-1)(s-1)\sqrt{s^{-1}t}\cos(x)-(1+t)^2\sin^2(x)}{(1+t)\sin^2(x)tc_j} \\
&+\frac{1+t}{tc_j}+2\sin(jx)\cos(jx)\frac{(t-1)\cos(x)+(s-1)\sqrt{s^{-1}t}}{\sin(x)tc_j}.
\end{aligned}
$$

Omdat $c_0=0$, kunnen we deze uitdrukking niet gebruiken om $k_0u_0(\theta)^2$ te berekenen. Echter hiervoor krijgen we $k_0u_0(\theta)^2 = 1$. Om nu nog $\sum_{j=1}^d k_ju_j(\theta)^2$ te berekenen, berekenen we eerst de sommen $\sum_{j=1}^d \frac{\sin^2(jx)}{c_j}$, $\sum_{j=1}^d \frac{1}{c_j}$ en $\sum_{j=1}^d \frac{\sin(jx)\cos(jx)}{c_j}$. We beginnen met de tweede som:

$$
\begin{aligned}
\sum_{j=1}^d \frac{1}{c_j} &= \frac{1}{t+1}+\sum_{j=1}^{d-1}1 \\
&= \frac{1}{t+1}+d-1 \\
&= \frac{dt+d-t}{t+1}.
\end{aligned}
$$

Om $\sum_{j=1}^d \frac{\sin^2(jx)}{c_j}$ te berekenen, schrijven we deze som als $\frac{\sin^2(dx)}{t+1}+\sum_{j=1}^{d-1}\sin^2(jx)$. Deze laatste som kunnen we schrijven als

$$
\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{d-1}\frac{1-\cos(2jx)}{2} &= \sum_{j=1}^{d-1}\frac{1}{2}-\sum_{j=1}^{d-1}\frac{\cos(2jx)}{2} \\
&= \frac{d-1}{2}-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{d-1}\cos(2jx).
\end{aligned}
$$

We weten dat $\sum_{j=1}^{d-1}\cos(2jx)$ het reëel deel van $\sum_{j=1}^{d-1} e^{2ijx}$ is. We hebben

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{d-1} e^{2ijx} &= \frac{e^{i2x}-e^{i2dx}}{1-e^{i2x}}\\ &= \frac{\cos(2x)+i\sin(2x)-\cos(2dx)-i\sin(2dx)}{1-\cos(2x)-i\sin(2x)}.\end{aligned}$$

Door middel van $dx = \frac{2d\pi l}{2d} = \pi l$ wordt dit

$$\sum_{j=1}^{d-1} e^{2ijx} = \frac{\cos(2x)+i\sin(2x)-1}{1-\cos(2x)-i\sin(2x)} = -1.$$

Samengevat krijgen we dus

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{d-1}\cos(2jx) &= -1,\\ \frac{d-1}{2}-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{d-1}\cos(2jx) &= \frac{d-1}{2}+\frac{1}{2}=\frac{d}{2},\\ \sum_{j=1}^{d-1}\sin^2(jx) &= \frac{d}{2},\\ \sum_{j=1}^{d}\sin^2(jx) &= \frac{\sin^2(dx)}{t+1}+\frac{d}{2}=\frac{d}{2}.\end{aligned}$$

De laatste som die we nog nodig hebben is $\sum_{j=1}^{d}\frac{\sin(jx)\cos(jx)}{c_j} = \frac{\sin(dx)\cos(dx)}{t+1}+\sum_{j=1}^{d-1}\sin(jx)\cos(jx)$. We weten dat we $\sum_{j=1}^{d-1}\sin(jx)\cos(jx)$ ook kunnen schrijven als $\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{d-1}\sin(2jx)$ en dus als het imaginaire deel van $\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{d-1}e^{2ijx}$. Uit de vorige berekening halen we

$$\sum_{j=1}^{d-1}\sin(2jx) = 0.$$

Hiermee wordt

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{d-1}\sin(2jx) =&0,\\ \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{d-1}\sin(2jx) =&0,\\ \frac{\sin(dx)\cos(dx)}{t+1}+\frac{1}{2}\sum_{j=0}^{d-1}\sin(2jx) =&0+0=0.\end{aligned}$$

We kunnen nu $\sum_{j=0}^{d} k_j u_j(\theta)^2$ construeren:

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{d} k_j u_j(\theta)^2 =&1+\frac{(t-1)^2\cos^2(x)+(s-1)^2(s^{-1}t)+2(t-1)(s-1)\sqrt{s^{-1}t}\cos(x)-(1+t)^2\sin^2(x)}{(1+t)\sin^2(x)t}\sum_{j=1}^{d}\frac{\sin^2(jx)}{c_j}\\ &+\frac{1+t}{t}\sum_{j=1}^{d}\frac{1}{c_j}+2\frac{(t-1)\cos(x)+(s-1)\sqrt{s^{-1}t}}{\sin(x)t}\sum_{j=1}^{d}\frac{\sin(jx)\cos(jx)}{c_j}\\ =&1+\frac{(t-1)^2\cos^2(x)+(s-1)^2(s^{-1}t)+2(t-1)(s-1)\sqrt{s^{-1}t}\cos(x)-(1+t)^2\sin^2(x)}{(1+t)\sin^2(x)t}\frac{d}{2}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+\frac{1+t}{t}\frac{dt+d-t}{t+1}\\
=&1+\frac{(t-1)^2+(s-1)^2(s^{-1}t)+2(t-1)(s-1)\sqrt{s^{-1}t}\cos(x)-((1+t)^2+(t-1)^2)\sin^2(x)}{(1+t)\sin^2(x)t}\frac{d}{2}\\
&+\frac{dt+d-t}{t}\\
=&1+\frac{(t-1)^2+(s-1)^2(s^{-1}t)+2(t-1)(s-1)\sqrt{s^{-1}t}\cos(x)}{(1+t)\sin^2(x)t}\frac{d}{2}-\frac{((1+t)^2+(t-1)^2)}{(1+t)t}\frac{d}{2}\\
&+\frac{dt+d-t}{t}\\
=&1+\frac{(t-1)^2+(s-1)^2(s^{-1}t)+2(t-1)(s-1)\sqrt{s^{-1}t}\cos(x)}{(1+t)\sin^2(x)t}\frac{d}{2}-\frac{d(1+t^2)}{(1+t)t}+\frac{dt+d-t}{t}\\
=&\frac{2dt}{t(1+t)}+\frac{(t-1)^2+(s-1)^2(s^{-1}t)+2(t-1)(s-1)\sqrt{s^{-1}t}\cos(x)}{(1+t)\sin^2(x)t}\frac{d}{2}\\
=&\frac{n}{t+1}\left(1+\frac{s(t-1)^2+t(s-1)^2+2(s-1)(t-1)\sqrt{st}\cos(x)}{4st\sin^2(x)}\right).
\end{aligned}
$$

Als we $x$ terug vervangen door $\frac{2\pi l}{n}$ krijgen we

$$
\sum_{j=0}^{d}k_ju_j(\theta)^2=\frac{n}{t+1}\left(1+\frac{s(t-1)^2+t(s-1)^2+2(s-1)(t-1)\sqrt{st}\cos\left(\frac{2\pi l}{n}\right)}{4st\sin^2\left(\frac{2\pi l}{n}\right)}\right). \tag{6.3}
$$

Dit moet voor elke $l$ met $1\leq l\leq d-1$ een rationaal getal zijn. Als we $\frac{n}{2}-l$ in plaats van $l$ schrijven, krijgen we

$$
\begin{aligned}
\sum_{j=0}^{d}k_ju_j(\theta)^2&=\frac{n}{t+1}\left(1+\frac{s(t-1)^2+t(s-1)^2+2(s-1)(t-1)\sqrt{st}\cos\left(\frac{2\pi(\frac{n}{2}-l)}{n}\right)}{4st\sin^2\left(\frac{2\pi(\frac{n}{2}-l)}{n}\right)}\right)\\
&=\frac{n}{t+1}\left(1+\frac{s(t-1)^2+t(s-1)^2+2(s-1)(t-1)\sqrt{st}\cos\left(\pi-\frac{2\pi l}{n}\right)}{4st\sin^2\left(\pi-\frac{2\pi l}{n}\right)}\right)\\
&=\frac{n}{t+1}\left(1+\frac{s(t-1)^2+t(s-1)^2-2(s-1)(t-1)\sqrt{st}\cos\left(\frac{2\pi l}{n}\right)}{4st\sin^2\left(\frac{2\pi l}{n}\right)}\right).
\end{aligned}
$$

Tellen we nu de uitdrukkingen voor $l$ en $\frac{n}{2}-l$ op, dan bekomen we opnieuw een rationaal getal:

$$
\frac{2n}{t+1}(1+\frac{s(t-1)^2+t(s-1)^2}{4st\sin^2(\frac{2\pi l}{n})}).
$$

Dit kan enkel een rationaal getal zijn als $\sin^2(\frac{2\pi l}{n})$ een rationaal getal is, dus als $4\sin^2(\frac{2\pi l}{n})$ een rationaal getal is. We vinden echter ook

$$
\begin{aligned}
(\eta-\eta^{-1})^2&=\left(\cos\left(\frac{2\pi l}{n}\right)+i\sin\left(\frac{2\pi l}{n}\right)-\cos\left(-\frac{2\pi l}{n}\right)-i\sin\left(-\frac{2\pi l}{n}\right)\right)^2\\
&=\left(\cos\left(\frac{2\pi l}{n}\right)+i\sin\left(\frac{2\pi l}{n}\right)-\cos\left(\frac{2\pi l}{n}\right)+i\sin\left(\frac{2\pi l}{n}\right)\right)^2\\
&=\left(2i\sin\left(\frac{2\pi l}{n}\right)\right)^2\\
&=-4\sin^2\left(\frac{2\pi l}{n}\right).
\end{aligned}
$$

We weten dat $\eta$ en $\eta^{-1}$ beide algebraïsche gehele getallen zijn. Het zijn immers beide wortels van $x^{2d}=1$. Omdat de som en het product van twee algebraïsche gehele getallen ook een algebraïsch geheel getal is, is $(\eta-\eta^{-1})^2$ ook een algebraïsch geheel getal. Hieruit volgt dat $4\sin^2(\frac{2\pi l}{n}) = 4\sin^2(\frac{\pi l}{d})$ een geheel getal is. We zien in dat $4\sin^2(\frac{\pi l}{d}) \leq 4$ en ook altijd positief is. We stellen $l=1$ en zoeken de mogelijke $n$:

$$\begin{aligned}
4\sin^2\left(\frac{\pi}{d}\right) &= 4 \to \sin^2\left(\frac{\pi}{d}\right) = 1 \to \sin\left(\frac{\pi}{d}\right) = 1 \to \frac{\pi}{d} = \frac{\pi}{2} \to d = 2 \to n = 4,\\
4\sin^2\left(\frac{\pi}{d}\right) &= 3 \to \sin^2\left(\frac{\pi}{d}\right) = \frac{3}{4} \to \sin\left(\frac{\pi}{d}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \to \frac{\pi}{d} = \frac{\pi}{3} \to d = 3 \to n = 6,\\
4\sin^2\left(\frac{\pi}{d}\right) &= 2 \to \sin^2\left(\frac{\pi}{d}\right) = \frac{1}{2} \to \sin\left(\frac{\pi}{d}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \to \frac{\pi}{d} = \frac{\pi}{4} \to d = 4 \to n = 8,\\
4\sin^2\left(\frac{\pi}{d}\right) &= 1 \to \sin^2\left(\frac{\pi}{d}\right) = \frac{1}{4} \to \sin\left(\frac{\pi}{d}\right) = \frac{1}{2} \to \frac{\pi}{d} = \frac{\pi}{6} \to d = 6 \to n = 12.
\end{aligned}$$

We weten nu dat $\sum_{j=0}^{d} k_j u_j(\theta)^2$ een rationaal getal is, en dat de noemer van (6.3) rationaal is. Hieruit volgt dat ook de teller van (6.3) rationaal is, en dus dat $\sqrt{st}\cos(\frac{2\pi l}{n})$ rationaal moet zijn voor alle $0 \leq l < n$. Voor $n = 12$ moet dus $\sqrt{st}\cos(\frac{\pi l}{6})$ altijd rationaal zijn. Bekijken we $l = 1$ en $l = 2$, dan zien we dat zowel $\frac{\sqrt{2st}}{2}$ als $\frac{\sqrt{st}}{2}$ rationaal zijn, wat onmogelijk is. Voor $n = 8$ en $l = 1$ krijgen we dat $\sqrt{st}\cos(\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2st}}{2}$ rationaal is, dus dat $2st$ een kwadraat is. Voor $n = 6$ en $l = 1$ zien we dat $\sqrt{st}\cos(\frac{\pi}{3}) = \frac{\sqrt{st}}{2}$ rationaal is, dus dat $st$ een kwadraat is.

We besluiten dit geval met drie lemma's waarin we de ongelijkheden in verband met $s$ en $t$ bewijzen voor elke mogelijke diameter.

**Lemma 6.6.** *Als $n = 4$, dan is $s \leq t^2$ en $t \leq s^2$.*

**Bewijs.** In Hoofdstuk 4 vonden we al de voorwaarde $t \leq s^2$ voor schiervierhoeken met $s > 1$. Elke schiervierhoek is een veralgemeende vierhoek, dus dit bewijst al het eerste deel van het lemma. De duale van een veralgemeende vierhoek is ook een veralgemeende vierhoek. Deze ongelijkheid geldt dus ook in de duale, waardoor de ongelijkheid $t^2 \geq s$ geldt als $t > 1$. □

**Lemma 6.7.** *Als $n = 6$, dan is $s \leq t^3$ en $t \leq s^3$.*

**Bewijs.** Hier krijgen we eigenwaarden $k, -t-1$ en $2\sqrt{st}\cos(\frac{2l\pi}{6}) + s - 1$ met $l = 1, 2$, dus eigenwaarden $s(t+1), -t-1, s-1+\sqrt{st}$ en $s-1-\sqrt{st}$. Na ordening krijgen we

$$\begin{aligned}
\theta_0 &= s(t+1) \text{ als } \eta = \sqrt{st},\\
\theta_1 &= s-1+\sqrt{st} \text{ als } \eta = e^{\frac{i\pi}{3}},\\
\theta_2 &= s-1-\sqrt{st} \text{ als } \eta = e^{\frac{i2\pi}{3}},\\
\theta_3 &= -t-1 \text{ als } \eta = -\sqrt{\frac{t}{s}}.
\end{aligned}$$

Willen we de Kreinvoorwaarde $0 \leq q_{233}$ gebruiken, dan hebben we de volgende waarden nodig:

$$\begin{aligned}
&k_0 = 1, \quad k_1 = s(t+1), \quad k_2 = s^2 t(t+1), \quad k_3 = s^3 t^2,\\
&u_0(\theta_2) = 1, \quad u_0(\theta_3) = 1, \quad u_1(\theta_2) = \frac{s-1-\sqrt{st}}{s(t+1)}, \quad u_1(\theta_3) = \frac{-t-1}{s(t+1)} = \frac{-1}{s}.
\end{aligned}$$

Om $u_l(\theta_2)$ te berekenen, zoeken we eerst $\eta^l - \eta^{-l}$ met $\eta = e^{\frac{i2\pi}{3}}$:

$$\begin{aligned}
e^{\frac{il2\pi}{3}} - e^{\frac{-il2\pi}{3}} &= \cos\left(\frac{l2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{l2\pi}{3}\right) - \cos\left(\frac{-l2\pi}{3}\right) - i\sin\left(\frac{-l2\pi}{3}\right)\\
&= \cos\left(\frac{l2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{l2\pi}{3}\right) - \cos\left(\frac{l2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{l2\pi}{3}\right)\\
&= 2i\sin\left(\frac{l2\pi}{3}\right).
\end{aligned}$$

Nu bekomen we

$$\begin{aligned}
u_2(\theta_2) &= \frac{t(\eta^3-\eta^{-3})+(s-1)\sqrt{s^{-1}t}(\eta^2-\eta^{-2})-(\eta-\eta^{-1})}{(1+t)(\eta-\eta^{-1})(\sqrt{st})^2} \\
&= \frac{2i\sin(\frac{6\pi}{3})t+2i\sin(\frac{4\pi}{3})(s-1)\sqrt{s^{-1}t}-2i\sin(\frac{2\pi}{3})}{2i\sin(\frac{2\pi}{3})(1+t)st} \\
&= \frac{\frac{-\sqrt{3}}{2}(s-1)\sqrt{s^{-1}t}-\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}(1+t)st} \\
&= \frac{-(s-1)\sqrt{s^{-1}t}-1}{(1+t)st}, \\
u_3(\theta_2) &= \frac{t(\eta^4-\eta^{-4})+(s-1)\sqrt{s^{-1}t}(\eta^3-\eta^{-3})-(\eta^2-\eta^{-2})}{(1+t)(\eta-\eta^{-1})(\sqrt{st})^3} \\
&= \frac{2i\sin(\frac{8\pi}{3})t+2i\sin(\frac{6\pi}{3})(s-1)\sqrt{s^{-1}t}-2i\sin(\frac{4\pi}{3})}{(1+t)2i\sin(\frac{2\pi}{3})(\sqrt{st})^3} \\
&= \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}t+\frac{\sqrt{3}}{2}}{(1+t)\frac{\sqrt{3}}{2}(\sqrt{st})^3} \\
&= \frac{t+1}{(1+t)(\sqrt{st})^3} = \frac{1}{\sqrt{st}^3}.
\end{aligned}$$

De laatste waarden die we nodig hebben zijn

$$\begin{aligned}
u_2(\theta_3) &= \frac{t(\eta^3-\eta^{-3})+(s-1)\sqrt{s^{-1}t}(\eta^2-\eta^{-2})-(\eta-\eta^{-1})}{(1+t)(\eta-\eta^{-1})(\sqrt{st})^2} \\
&= \frac{t\left(-\left(\sqrt{\frac{t}{s}}\right)^3+\left(\sqrt{\frac{s}{t}}\right)^3\right)+(s-1)\sqrt{s^{-1}t}\left(\frac{t}{s}-\frac{s}{t}\right)-\left(-\sqrt{\frac{t}{s}}+\sqrt{\frac{s}{t}}\right)}{(1+t)\left(-\sqrt{\frac{t}{s}}+\sqrt{\frac{s}{t}}\right)st} \\
&= \frac{-\frac{t^2}{s}\sqrt{\frac{t}{s}}+s\sqrt{\frac{s}{t}}+t\sqrt{\frac{t}{s}}-s\sqrt{\frac{s}{t}}-\frac{t}{s}\sqrt{\frac{t}{s}}+\sqrt{\frac{s}{t}}+\sqrt{\frac{t}{s}}-\sqrt{\frac{s}{t}}}{(1+t)(-t\sqrt{st}+s\sqrt{st})} \\
&= \frac{-\frac{t^2}{s}\sqrt{\frac{t}{s}}+t\sqrt{\frac{t}{s}}-\frac{t}{s}\sqrt{\frac{t}{s}}+\sqrt{\frac{t}{s}}}{(1+t)(-t+s)\sqrt{st}} = \frac{-\frac{t^2}{s}+t-\frac{t}{s}+1}{(1+t)(-t+s)s} = \frac{(s-t)(t+1)}{(1+t)(-t+s)s^2} \\
&= \frac{1}{s^2}
\end{aligned}$$

en

$$\begin{aligned}
u_3(\theta_3) &= \frac{t(\eta^4-\eta^{-4})+(s-1)\sqrt{s^{-1}t}(\eta^3-\eta^{-3})-(\eta^2-\eta^{-2})}{(1+t)(\eta-\eta^{-1})(\sqrt{st})^3} \\
&= \frac{t\left(\frac{t^2}{s^2}-\frac{s^2}{t^2}\right)+(s-1)\sqrt{s^{-1}t}\left(-\left(\sqrt{\frac{t}{s}}\right)^3+\left(\sqrt{\frac{s}{t}}\right)^3\right)-\left(\frac{t}{s}-\frac{s}{t}\right)}{(1+t)\left(-\sqrt{\frac{t}{s}}+\sqrt{\frac{s}{t}}\right)(\sqrt{st})^3} \\
&= \frac{\frac{t^3}{s^2}-\frac{s^2}{t}+(s-1)\left(-\frac{t^2}{s^2}+\frac{s}{t}\right)-\left(\frac{t}{s}-\frac{s}{t}\right)}{(1+t)st(-t+s)} \\
&= \frac{\frac{t^3}{s^2}-\frac{s^2}{t}-\frac{t^2}{s}+\frac{s^2}{t}+\frac{t^2}{s^2}-\frac{s}{t}-\frac{t}{s}+\frac{s}{t}}{(1+t)st(-t+s)} \\
&= \frac{\frac{t^3}{s^2}-\frac{t^2}{s}+\frac{t^2}{s^2}-\frac{t}{s}}{(1+t)st(-t+s)} \\
&= \frac{t^3-st^2+t^2-st}{(1+t)s^3t(-t+s)} = \frac{t(t-s)(t+1)}{(1+t)s^3t(-t+s)} = \frac{-1}{s^3}.
\end{aligned}$$

De Kreinvoorwaarde $0 \leq q_{233}$ wordt dan

$$\begin{aligned}
0 &\leq \sum_{i=0}^{2} k_i u_i(\theta_2)(u_i(\theta_3))^2 \\
&= 1(1)(1)^2 + s(t+1)\frac{s-1-\sqrt{st}}{s(t+1)}(\frac{-1}{s})^2 - s^2t(t+1)\frac{(s-1)\sqrt{s^{-1}t}+1}{(1+t)st}(\frac{1}{s^2})^2 + s^3t^2\frac{1}{\sqrt{st}^3}(\frac{-1}{s^3})^2 \\
&= 1 + \frac{s-1-\sqrt{st}}{s^2} - \frac{(s-1)\sqrt{st}+s}{s^4} + \frac{\sqrt{st}}{s^5} \\
&= \frac{s^5+s^4-s^3-s^3\sqrt{st}-s^2\sqrt{st}-s^2+s\sqrt{st}+\sqrt{st}}{s^5} \\
&= \frac{(s^2-\sqrt{st})(s-1)(s+1)^2}{s^5}.
\end{aligned}$$

Voor $s > 1$ geldt dus dat $s^2 \geq \sqrt{st}$ wat we kunnen schrijven als $s^3 \geq t$. Passen we deze eigenschap toe op de duale veralgemeende zeshoek, dan krijgen we de ongelijkheid $t^3 \geq s$ als $t > 1$. □

**Lemma 6.8.** *Als $n = 8$, dan is $t \leq s^2$ en $s \leq t^2$.*

**Bewijs.** Hier hebben we eigenwaarden $s(t+1), -t-1$ en $2\sqrt{st}\cos(\frac{2\pi l}{8}) + s - 1$ met $l = 1, 2, 3$.

| $l$ | $\theta$ | $\eta$ |
|---|---|---|
| | $s(t+1)$ | $\sqrt{st}$ |
| | $-t-1$ | $-\sqrt{\frac{t}{s}}$ |
| 1 | $s-1+2\sqrt{st}\cos(\frac{\pi}{4}) = s-1+\sqrt{2st}$ | $e^{\frac{i\pi}{4}}$ |
| 2 | $s-1+2\sqrt{st}\cos(\frac{\pi}{2}) = s-1$ | $e^{\frac{i\pi}{2}}$ |
| 3 | $s-1+2\sqrt{st}\cos(\frac{3\pi}{4}) = s-1-\sqrt{2st}$ | $e^{\frac{i3\pi}{4}}$ |

We krijgen dus

$$\begin{aligned}
\theta_0 &= s(t+1), \\
\theta_1 &= s-1+\sqrt{2st}, \\
\theta_2 &= s-1, \\
\theta_3 &= s-1-\sqrt{2st}, \\
\theta_4 &= -t-1.
\end{aligned}$$

Om nu de Kreinvoorwaarde $q_{444} \geq 0$ te gebruiken, hebben we de volgende waarden nodig:

$$\begin{aligned}
&k_0 = 1, \quad k_1 = s(t+1), \quad k_2 = s^2t(t+1), \quad k_3 = s^3t^2(t+1), \quad k_4 = s^4t^3, \\
&u_0(\theta_4) = 1, \quad u_1(\theta_4) = \frac{-t-1}{s(t+1)} = \frac{-1}{s}, \\
&u_2(\theta_4) = \frac{t\left(-\left(\sqrt{\frac{t}{s}}\right)^3 + \left(\sqrt{\frac{s}{t}}\right)^3\right) + (s-1)\sqrt{s^{-1}t}\left(\frac{t}{s}-\frac{s}{t}\right) - \left(-\sqrt{\frac{t}{s}}+\sqrt{\frac{s}{t}}\right)}{(1+t)\left(-\sqrt{\frac{t}{s}}+\sqrt{\frac{s}{t}}\right)st} = \frac{1}{s^2}, \\
&u_3(\theta_4) = \frac{t\left(\frac{t^2}{s^2}-\frac{s^2}{t^2}\right) + (s-1)\sqrt{s^{-1}t}\left(-\left(\sqrt{\frac{t}{s}}\right)^3 + \left(\sqrt{\frac{s}{t}}\right)^3\right) - \left(\frac{t}{s}-\frac{s}{t}\right)}{(1+t)\left(-\sqrt{\frac{t}{s}}+\sqrt{\frac{s}{t}}\right)(\sqrt{st})^3} = \frac{-1}{s^3},
\end{aligned}$$

en

$$
\begin{aligned}
u_4(\theta_4) &= \frac{t\left(-\left(\sqrt{\frac{t}{s}}\right)^5 + \left(\sqrt{\frac{s}{t}}\right)^5\right) + (s-1)\sqrt{s^{-1}t}\left(\frac{t^2}{s^2} - \frac{s^2}{t^2}\right) - \left(-\frac{t}{s}\sqrt{\frac{t}{s}} + \frac{s}{t}\sqrt{\frac{s}{t}}\right)}{(1+t)\left(-\sqrt{\frac{t}{s}} + \sqrt{\frac{s}{t}}\right)s^2t^2} \\
&= \frac{-\frac{t^3}{s^2}\sqrt{\frac{t}{s}} + \frac{s^2}{t}\sqrt{\frac{s}{t}} + (s-1)\left(\frac{t^2}{s^2}\sqrt{\frac{t}{s}} - \frac{s}{t}\sqrt{\frac{s}{t}}\right) + \frac{t}{s}\sqrt{\frac{t}{s}} - \frac{s}{t}\sqrt{\frac{s}{t}}}{(1+t)(-t\sqrt{st} + s\sqrt{st})st} \\
&= \frac{-\frac{t^3}{s^2}\sqrt{\frac{t}{s}} + \frac{s^2}{t}\sqrt{\frac{s}{t}} + \frac{t^2}{s}\sqrt{\frac{t}{s}} - \frac{s^2}{t}\sqrt{\frac{s}{t}} - \frac{t^2}{s^2}\sqrt{\frac{t}{s}} + \frac{s}{t}\sqrt{\frac{s}{t}} + \frac{t}{s}\sqrt{\frac{t}{s}} - \frac{s}{t}\sqrt{\frac{s}{t}}}{(1+t)(-t+s)st\sqrt{st}} \\
&= \frac{-\frac{t^3}{s^2}\sqrt{\frac{t}{s}} + \frac{t^2}{s}\sqrt{\frac{t}{s}} - \frac{t^2}{s^2}\sqrt{\frac{t}{s}} + \frac{t}{s}\sqrt{\frac{t}{s}}}{(1+t)(-t+s)st\sqrt{st}} \\
&= \frac{-t^3 + st^2 - t^2 + st}{(1+t)(-t+s)s^4t} = \frac{t(t+1)(s-t)}{(1+t)(-t+s)s^4t} = \frac{1}{s^4}.
\end{aligned}
$$

De Kreinvoorwaarde $0 \leq q_{444}$ wordt dan

$$
\begin{aligned}
0 \leq q_{444} &= \sum_{i=0}^{4} k_i(u_i(\theta_4))^3 \\
&= 1(1)^3 + s(t+1)\left(\frac{-1}{s}\right)^3 + s^2t(t+1)\left(\frac{1}{s^2}\right)^3 + s^3t^2(t+1)\left(\frac{-1}{s^3}\right)^3 + s^4t^3\left(\frac{1}{s^4}\right)^3 \\
&= 1 - \frac{t+1}{s^2} + \frac{t(t+1)}{s^4} - \frac{t^2(t+1)}{s^6} + \frac{t^3}{s^8} \\
&= \frac{s^8 - s^6t - s^6 + s^4t^2 + s^4t - s^2t^3 - s^2t^2 + t^3}{s^8} \\
&= \frac{(s^2-1)(s^4+t^2)(s^2-t)}{s^8}.
\end{aligned}
$$

Als $s > 1$ krijgen we dus de voorwaarde $s^2 \geq t$. Als we de duale veralgemeende achthoek bekijken, dan zien we dat $t^2 \geq s$ als $t > 1$. □

# 4 Het geval $n = 2d + 1$

Als $n = 2d + 1$, dan is $c_d = 1$ en is $s = t$ en wordt (6.2) de volgende gelijkheid:

$$
\begin{aligned}
t(\eta^{d+1} - \eta^{-d-1}) + s\sqrt{s^{-1}t}(\eta^d - \eta^{-d}) &= 0, \\
t(\eta^{d+1} - \eta^{-d-1}) + t(\eta^d - \eta^{-d}) &= 0, \\
\eta^{d+1} - \eta^{-d-1} + \eta^d - \eta^{-d} &= 0, \\
\eta^{2d+2} - 1 + \eta^{2d+1} - \eta &= 0, \\
(\eta+1)(\eta^{2d+1} - 1) &= 0.
\end{aligned}
$$

Voor $\eta = -1$ krijgen we $\theta = \sqrt{st}(-2) + s - 1 = -2s + s - 1 = -s - 1$. Uit $\eta^{2d+1} - 1 = 0$ krijgen we nulpunten $\eta = e^{\frac{i2\pi l}{n}}$ met $0 \leq l < n$ wat net zoals in het geval met even $n$ overeenkomt met $\theta = 2\sqrt{st}\cos(\frac{2\pi l}{n}) + s - 1$ met $0 \leq l < n$. Ook hier moeten we het geval $l = 0$ uitsluiten. Voor $l > d$ geldt $\cos(\frac{2\pi l}{n}) = \cos(\frac{2\pi(d-(l-d-1))}{n})$, waardoor we enkel de eigenwaarden $\theta = 2\sqrt{st}\cos(\frac{2\pi l}{n}) + s - 1$ met $1 \leq l \leq d$ overhouden. Net zoals in het geval $n = 2d$ willen we hier $\sum_{j=0}^{d} k_j u_j(\theta)^2$ berekenen, om daarna uit te drukken dat dit een rationaal getal moet zijn. We nemen daarvoor $\theta = 2\sqrt{st}\cos(\frac{2\pi l}{n}) + s - 1$ en de bijbehorende $\eta = e^{\frac{i2\pi l}{n}}$. We kunnen dan voor de berekening van $\sum_{j=0}^{d} k_j u_j(\theta)^2$ een groot deel van de berekeningen in het geval $n = 2d$ overnemen. Met $x := \frac{2\pi l}{n}$ vinden we zo al

$$
u_j(\theta) = \sin(jx)\frac{(t-1)\cos(x) + (t-1)}{(1+t)\sin(x)t^j} + \frac{\cos(jx)}{t^j},
$$

$$
\begin{aligned}
u_j(\theta)^2 =& \sin^2(jx)\frac{(t-1)^2\cos^2(x)+(t-1)^2+2(t-1)^2\cos(x)-(1+t)^2\sin^2(x)}{(1+t)^2\sin^2(x)t^{2j}}\\
&+\frac{1}{t^{2j}}+2\sin(jx)\cos(jx)\frac{(t-1)\cos(x)+(t-1)}{(t+1)\sin(x)t^{2j}},\\
k_j =& t^{2j-1}(t+1),\\
k_ju_j(\theta)^2 =& \sin^2(jx)\frac{(t-1)^2\cos^2(x)+(t-1)^2+2(t-1)^2\cos(x)-(1+t)^2\sin^2(x)}{(1+t)\sin^2(x)t}\\
&+\frac{1+t}{t}+2\sin(jx)\cos(jx)\frac{(t-1)\cos(x)+(t-1)}{\sin(x)t}.
\end{aligned}
$$

Hier hebben we stilzwijgend gedeeld door $c_j$. Voor $j=0$ geldt deze formule dus niet, maar daarvoor weten we dat $k_0u_0(\theta)^2=1$. We moeten hier dus nog de sommen $\sum_{j=1}^d \sin^2(jx)$, $\sum_{j=1}^d \sin(2jx)$ en $\sum_{j=1}^d \frac{t+1}{t}$ berekenen. Voor die laatste krijgen we

$$\sum_{j=1}^d \frac{t+1}{t}=\frac{d(t+1)}{t}. \tag{6.4}$$

Voor de eerste som krijgen we

$$\sum_{j=1}^d \sin^2(jx)=\sum_{j=1}^d \frac{1-\cos(2jx)}{2}=\frac{d}{2}-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^d \cos(2jx). \tag{6.5}$$

Het laatste stuk van deze som is gelijk aan het reëel deel van $\sum_{j=1}^d e^{2ijx}$. We weten echter dat

$$\sum_{j=1}^d e^{2ijx}=e^{2ix}\frac{1-e^{i2dx}}{1-e^{i2x}}=(\cos(2x)+i\sin(2x))\frac{1-\cos(2dx)-i\sin(2dx)}{1-\cos(2x)-i\sin(2x)}.$$

Dankzij $2dx=\frac{4d\pi l}{2d+1}=2\pi l-\frac{2\pi l}{2d+1}=2\pi l-x$ vinden we dat $\cos(2dx)=\cos(-x)=\cos(x)$ en $\sin(2dx)=\sin(-x)=-\sin(x)$. Hiermee krijgen we de volgende uitdrukking:

$$
\begin{aligned}
\sum_{j=1}^d e^{2ijx} &= (\cos(2x)+i\sin(2x))\frac{1-\cos(x)+i\sin(x)}{1-\cos(2x)-i\sin(2x)}\\
&=\frac{(\cos(2x)+i\sin(2x))(1-\cos(x)+i\sin(x))(1-\cos(2x)+i\sin(2x))}{(1-\cos(2x)-i\sin(2x))(1-\cos(2x)+i\sin(2x))}\\
&=\frac{\cos(2x)-1+i(\sin(2x)-2\sin(x))}{2-2\cos(2x)}.
\end{aligned}
$$

We vinden dus

$$
\begin{aligned}
\sum_{j=1}^d \cos(2jx) &= \frac{\cos(2x)-1}{2-2\cos(2x)}=\frac{-1}{2}\\
\sum_{j=1}^d \sin^2(jx) &= \frac{d}{2}-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^d \cos(2jx)=\frac{2d+1}{4}
\end{aligned}
$$

De laatste som die we nodig hebben is $\sum_{j=1}^d \sin(2jx)$. Dit is het imaginair deel van $\sum_{j=1}^d e^{2ijx}$, dus krijgen we hiervoor

$$\sum_{j=1}^d \sin(2jx)=\frac{\sin(2x)-2\sin(x)}{2-2\cos(2x)}=\frac{2\sin(x)(\cos(x)-1)}{2-2\cos(2x)}$$

Als we deze drie sommen terug in de uitdrukking voor $\sum_{j=0}^d k_ju_j(\theta)^2$ steken, krijgen we

$$\sum_{j=0}^d k_ju_j(\theta)^2 =1+\frac{(t-1)^2\cos^2(x)+(t-1)^2+2(t-1)^2\cos(x)-(1+t)^2\sin^2(x)}{(1+t)\sin^2(x)t}\sum_{j=1}^d \sin^2(jx)$$

$$
\begin{aligned}
&+\sum_{j=1}^{d}\frac{1+t}{t}+\frac{(t-1)\cos(x)+(t-1)}{\sin(x)t}\sum_{j=1}^{d}2\sin(jx)\cos(jx)\\
=&1+\frac{(t-1)^2\cos^2(x)+(t-1)^2+2(t-1)^2\cos(x)-(1+t)^2\sin^2(x)}{(1+t)\sin^2(x)t}\frac{2d+1}{4}+\frac{d(1+t)}{t}\\
&+\frac{(t-1)\cos(x)+(t-1)}{\sin(x)t}\frac{2\sin(x)(\cos(x)-1)}{2-2\cos(2x)}\\
=&1+\frac{(t-1)^2+(t-1)^2+2(t-1)^2\cos(x)-((1+t)^2+(t-1)^2)\sin^2(x)}{(1+t)\sin^2(x)t}\frac{2d+1}{4}+\frac{d(1+t)}{t}\\
&+\frac{(t-1)(\cos(x)+1)(\cos(x)-1)}{t(1-\cos(2x))}\\
=&1+\frac{2(t-1)^2(\cos(x)+1)}{(1+t)\sin^2(x)t}\frac{2d+1}{4}-\frac{2(t^2+1)\sin^2(x)}{(1+t)\sin^2(x)t}\frac{2d+1}{4}\\
&+\frac{d(1+t)}{t}-\frac{(t-1)\sin^2(x)}{t(1-\cos(2x))}\\
=&1+\frac{2(t-1)^2(\cos(x)+1)}{(1+t)\sin^2(x)t}\frac{2d+1}{4}-\frac{(2d+1)(t^2+1)}{2t(t+1)}+\frac{d(1+t)}{t}-\frac{(t-1)\sin^2(x)}{2t\sin^2(x)}\\
=&1+\frac{2(t-1)^2}{(1+t)(1-\cos(x))t}\frac{2d+1}{4}-\frac{(2d+1)(t^2+1)}{2t(t+1)}+\frac{d(1+t)}{t}-\frac{t-1}{2t}\\
=&\frac{(2d+1)(t-1)^2}{2(1+t)(1-\cos(x))t}+\frac{2t(t+1)-(2d+1)(t^2+1)+2d(t+1)^2-t^2+1}{2t(t+1)}\\
=&\frac{(2d+1)(t-1)^2}{2(1+t)(1-\cos(x))t}+\frac{2t(2d+1)}{2t(t+1)}\\
=&\frac{(2d+1)(t-1)^2}{2(1+t)(1-\cos(x))t}+\frac{2d+1}{t+1}=\frac{n}{t+1}\left(1+\frac{(t-1)^2}{2t(1-\cos(x))}\right).
\end{aligned}
$$

Dit is enkel rationaal indien $\cos(\frac{2\pi l}{n})$ rationaal is, dus als $2\cos(\frac{2\pi l}{n})$ rationaal is. We weten echter dat

$$
\begin{aligned}
\eta+\eta^{-1}&=\cos(\frac{2\pi l}{n})+i\sin(\frac{2\pi l}{n})+\cos(-\frac{2\pi l}{n})+i\sin(-\frac{2\pi l}{n})\\
&=\cos(\frac{2\pi l}{n})+i\sin(\frac{2\pi l}{n})+\cos(\frac{2\pi l}{n})-i\sin(\frac{2\pi l}{n})\\
&=2\cos(\frac{2\pi l}{n}).
\end{aligned}
$$

Omdat $\eta+\eta^{-1}$ als som van twee algebraïsche gehele getallen ook een algebraïsch geheel getal is, is $2\cos(\frac{2\pi l}{n})$ een algebraïsch geheel getal, dus een geheel getal. We stellen $l=1$ en we bekijken alle gevallen $-2\leq 2\cos(\frac{2\pi l}{n})\leq 2$:

$$
\begin{aligned}
&2\cos(\frac{2\pi}{n})=2\to\cos(\frac{2\pi}{n})=1\to\frac{2\pi}{n}=2\pi\to n=1,\\
&2\cos(\frac{2\pi}{n})=1\to\cos(\frac{2\pi}{n})=\frac{1}{2}\to\frac{2\pi}{n}=\frac{\pi}{3}\to n=6,\\
&2\cos(\frac{2\pi}{n})=0\to\cos(\frac{2\pi}{n})=0\to\frac{2\pi}{n}=\frac{\pi}{2}\to n=4,\\
&2\cos(\frac{2\pi}{n})=-1\to\cos(\frac{2\pi}{n})=\frac{-1}{2}\to\frac{2\pi}{n}=\frac{2\pi}{3}\to n=3,\\
&2\cos(\frac{2\pi}{n})=-2\to\cos(\frac{2\pi}{n})=-1\to\frac{2\pi}{n}=\pi\to n=2.
\end{aligned}
$$

Hierbij maken we gebruik van het feit dat $n>1$. De enige oneven $n$ die we tegenkomen is $n=3$.

# Hoofdstuk 7

# Het niet-bestaan van schierachthoeken met parameters $(s, t_2, t_3, t_4) = (2, 0, 8, 24)$

In dit hoofdstuk zullen we bewijzen dat er geen schierachthoeken bestaan met parameters $(s, t_2, t_3, t_4) = (2, 0, 8, 24)$. Hiertoe bekijken we eerst enkele grafen die we afleiden uit deze schierachthoek. Aan de hand van wat we weten over deze grafen zoeken we dan paden in de schierachthoek. Uiteindelijk zal blijken dat we meer paden kunnen construeren dan de parameters van de schierachthoek toelaten.

## 1 Definities en eigenschappen

Stel dat er wel een reguliere schierachthoek $S$ bestaat met parameters $(s, t_2, t_3, t_4) = (2, 0, 8, 24)$ en collineariteitsgraaf $\Gamma$. Als $x$ een punt van $S$ is, dan vinden we uit Lemma 4.4 dat

$$\begin{aligned}
|\Gamma_0(x)| &= 1, \\
|\Gamma_1(x)| &= s(t+1) = 50, \\
|\Gamma_2(x)| &= \frac{s^2(t+1)t}{t_2+1} = 2400, \\
|\Gamma_3(x)| &= \frac{s^3(t+1)t(t-t_2)}{(t_2+1)(t_3+1)} = 12800, \\
|\Gamma_4(x)| &= \frac{s^4 t(t-t_2)(t-t_3)}{(t_2+1)(t_3+1)} = 16384, \\
v &= 31635.
\end{aligned}$$

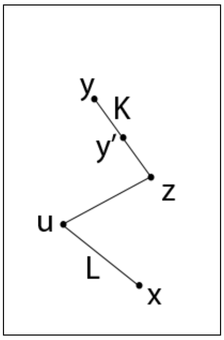
**Definitie 7.1.** *Voor een punt $x$ in $S$ definiëren we het volgende:*

- *$L_x$ is de verzameling van rechten door $x$,*
- *$\Gamma_x$ is de subgraaf van $\Gamma$ geïnduceerd door de punten uit $\Gamma_3(x)$,*
- *$C_x$ is de verzameling van samenhangende componenten van $\Gamma_x$,*
- *voor een punt $y$ uit $\Gamma_3(x)$ is $B(x, y)$ de verzameling van $t_3 + 1 = 9$ rechten door $x$ die een punt bevatten op afstand 2 van $y$,*
- *$B_x := \{B(x, y) | y \in \Gamma_3(x)\}$,*
- *$D_x = (L_x, B_x, I_x)$ is de punt-rechte meetkunde met puntenverzameling $L_x$, rechtenverzameling $B_x$ en de natuurlijke incidentie $I_x$.*

Als $y_1$ en $y_2$ adjacente punten in $\Gamma_3(x)$ zijn, dan bevat de rechte $y_1y_2$ twee punten op afstand 3 van $x$, dus ook een uniek punt op afstand 2 van $x$, hetwelke we $z$ noemen. Doordat $t_2 = 0$ is, gaat er slechts één rechte $L$ door $x$ die een buur van $z$ bevat. We noemen de punten $y_1$ en $y_2$ $L$-adjacent. We zien dat $L$ bevat is in $B(x, y_1)$ en $B(x, y_2)$.

**Lemma 7.2.** *Voor elk punt $x$ van $S$, elk punt $y$ van $\Gamma_x$ en elke rechte $L$ in $B(x, y)$ geldt dat er een uniek punt in $\Gamma_x$ is dat $L$-adjacent is aan $y$.*

**Bewijs.** We nemen een rechte $L$ uit $B(x, y)$, het unieke punt $u$ op $L$ op afstand 2 van $y$ en de unieke rechte $K$ door $y$ die een punt $z$ bevat op afstand 1 van $u$. Er is dan een uniek punt $y'$ op $K$ dat verschillend is van $z$ en $y$ en dat $L$-adjacent is aan $y$ (zie Figuur 7.1). Als we omgekeerd een punt $y''$ in $\Gamma_x$ hebben dat $L$-adjacent is aan $y$, dan moet de rechte $L$ een punt $u'$ bevatten op afstand 1 van $yy''$. Als $u \neq u'$ is, dan bevat $L$ twee punten op afstand 2 van $y$. De rechte $L$ moet dus ook een punt op afstand 1 van $y$ bevatten, een strijdigheid. We vinden dat $u = u'$; Doordat $t_2 = 0$, moet dus de rechte $yy''$ gelijk zijn aan $K$. Dit kan enkel als $y' = y''$. □




Figuur 7.1: Verduidelijking bij Lemma 7.2

Hieruit weten we voor elk punt $x$ dat elk punt van de graaf $\Gamma_x$ graad 9 heeft.

**Lemma 7.3.** *Voor een punt $x$ in $S$ en twee punten $y_1$ en $y_2$ in dezelfde samenhangende component van $\Gamma_3(x)$ is $B(x, y_1) = B(x, y_2)$.*

**Bewijs.** We nemen aan dat $y_1$ en $y_2$ adjacent zijn. Het lemma volgt dan inductief. We nemen een willekeurige $L \in B(x, y_1)$ en het unieke punt $z$ op $L$ met $d(y_1, z) = 2$. Omdat $y_1$ en $y_2$ adjacent zijn, moet $d(z, y_2) \leq 3$. Doordat $d(x, y_2) = 3$, bevat $L$ zeker twee punten op een afstand kleiner of gelijk aan 3 van $y_2$, dus ook een uniek punt op afstand 2 van $y_2$. Hieruit volgt dat $L \in B(x, y_2)$. Nu was $L$ een willekeurige rechte uit $B(x, y_1)$, dus we hebben in feite bewezen dat $B(x, y_1) \subset B(x, y_2)$. Door symmetrie is de stelling nu bewezen. □

## 2 De afbeelding $\theta_{x,C}$

**Definitie 7.4.** *Stel $\Sigma := \{+, -\}$ is, dan definiëren we de graaf $G$ als de graaf met als punten de elementen van $\Sigma^9$ met een oneven aantal $+$'en. Twee punten zijn adjacent als ze in exact één positie overeenkomen.*

Het aantal punten van $G$ is gelijk aan $\binom{9}{9} + \binom{9}{7} + \binom{9}{5} + \binom{9}{3} + \binom{9}{1} = 256$. Om de graad te vinden kunnen we kijken hoeveel punten adjacent zijn aan het punt $+^9$. Dit zijn exact de negen punten die in slechts één positie een $+$ hebben.

**Lemma 7.5.** *Als twee punten $m_i$ posities gemeenschappelijk hebben, liggen ze op afstand $i$ van elkaar in de $G$, met $(m_0, m_1, m_2, m_3, m_4) = (9, 1, 7, 3, 5)$.*

**Bewijs.** We kunnen zeggen dat twee punten nooit een even aantal posities gemeen kunnen hebben. Ze verschillen dan immers in een oneven aantal posities. Als één van de twee punten een oneven aantal $+$'en heeft in deze verschilposities, heeft het andere punt een even aantal $+$'en. Hieruit volgt dat één van de twee punten in totaal een even aantal +'en heeft en het andere een oneven aantal +'en. Volgens de definitie van $G$ is één van de twee punten dus geen punt.

Als twee punten negen posities gemeen hebben, dan zijn deze twee punten gelijk. Ze liggen dan op afstand 0. Omgekeerd zijn twee punten op afstand 0 gelijk, dus hebben ze negen posities gemeenschappelijk. Als twee punten één positie gemeen hebben, dan zijn ze volgens de definitie van $G$ adjacent en liggen ze dus op afstand 1. Omgekeerd zijn twee punten op afstand 1 adjacent, dus hebben ze volgens de definitie één positie gemeen.

Nemen we twee punten die zeven posities gemeenschappelijk hebben (bv. (-,-,+,+,+,+,+,+,+) en (+,+,+,+,+,+,+,+,+)), dan zien we dat deze niet adjacent zijn (want ze hebben zeven posities gemeen), maar ze zijn wel beide adjacent met het punt (+,-,-,-,-,-,-,-,-). Ze liggen dus op afstand 2 van elkaar. Nemen we omgekeerd twee punten $u, v$ op afstand 2 van elkaar, dan vinden we een punt $w$ adjacent met beide punten. Aangezien $w$ één positie gelijk heeft met $u$ en één positie met $v$, zijn er acht posities van $u$ verschillend aan $w$ en zijn er acht posities van $v$ verschillend aan $w$. Omdat $u$ en $v$ onmogelijk acht posities gemeen kunnen hebben, moeten ze dus wel zeven posities gemeen hebben.

Nemen we twee punten die drie posities gemeenschappelijk hebben (bv. (+,+,+,+,+,+,+,+,+) en (+,+,+,-,-,-,-,-,-)), dan vinden we via de punten (+,-,-,-,-,-,-,-,-) en (-,-,+,+,+,+,+,+,+) een pad van lengte 3. Uit het voorgaande vinden we dat de twee punten niet op afstand 0,1 of 2 kunnen liggen, dus moeten ze wel op afstand 3 liggen. Hebben we omgekeerd twee punten $u$ en $v$ op afstand 3, dan heeft $v$ een buur $w$ op afstand 2 van $u$. We weten dat $u$ en $w$ zeven posities gemeenschappelijk hebben en $v$ en $w$ één positie gemeenschappelijk hebben. Is de gemeenschappelijk positie van $v$ en $w$ niet één van de gemeenschappelijke posities van $u$ en $w$, dan zouden $u$ en $v$ in één positie verschillen (namelijk de positie die $w$ met geen van de punten $u$ en $v$ gemeenschappelijk heeft) en dus adjacent zijn. De gemeenschappelijke positie van $v$ en $w$ is dus één van de gemeenschappelijke posities van $u$ en $w$. We vinden dat $u$ en $v$ drie posities gemeenschappelijk hebben, namelijk de twee posities die ze beide verschillend hebben met $w$, en de positie die ze beide gelijk hebben met $w$.

Nemen we nu twee punten $u$ en $v$ die vijf posities gemeenschappelijk hebben, dan kunnen we een punt $w$ vinden dat zeven posities gemeenschappelijk heeft met zowel $u$ als $v$. Dit punt $w$ ligt op afstand 2 van zowel $u$ als $v$, dus door de driehoeksongelijkheid liggen de punten $u$ en $v$ hoogstens op afstand 4 van elkaar. Door het voorgaande kunnen ze niet op afstand 0, 1, 2 of 3 van elkaar liggen. Hebben we omgekeerd twee punten $u$ en $v$ op afstand 4 van elkaar, dan vinden we een punt $w$ dat zowel op afstand 2 van $u$ als van $v$ ligt. Dit punt $w$ heeft zeven posities gemeenschappelijk met $u$ en zeven posities gemeenschappelijk met $w$. We vinden dat $u$ en $v$ vijf, zeven of negen posities gemeenschappelijk hebben. In de laatste twee gevallen hebben we reeds bewezen dat de afstand tussen $u$ en $v$ gelijk is aan respectievelijk 2 en 0, dus kan het aantal gemeenschappelijke posities enkel gelijk zijn aan 5. $\square$

**Definitie 7.6.** *We kunnen voor elk puntenpaar $(x, y)$ van $S$ met $d(x, y) = 3$ een graaf $G_{x,y}$ opstellen die isomorf is met $G$. Omdat $t_3 = 8$, vinden we negen punten in $\Gamma_1(x) \bigcap \Gamma_2(y) = \{x_1^+, x_2^+, ..., x_9^+\}$. Voor elk punt $x_i^+$ noteren we $x_i^-$ voor het punt op $xx_i^+$ verschillend van $x$ en $x_i^+$. De punten van $G_{x,y}$ zijn nu verzamelingen van de vorm $\{x_1^{e_1}, x_2^{e_2}, ..., x_9^{e_9}\}$ met $e_i \in \{+, -\}$ en $e_1 \cdots e_9 = +$ (wat wil zeggen dat er een oneven aantal +'en zijn). Twee punten $\{x_1^{e_1}, x_2^{e_2}, ..., x_9^{e_9}\}$ en $\{x_1^{e_1'}, x_2^{e_2'}, ..., x_9^{e_9'}\}$ zijn adjacent als ze exact één positie gemeenschappelijk hebben, dus als $(e_1, ..., e_9)$ en $(e_1', ..., e_9')$ exact één positie gemeenschappelijk hebben. Als twee punten van $G_{x,y}$ het element $z$ gemeenschappelijk hebben, noemen we deze punten $L$-adjacent, waarbij $L$ de unieke rechte door $x$ en $z$ is.*

**Definitie 7.7.** *We nemen twee grafen $G_1$ en $G_2$ met puntenverzameling $V_1$ en $V_2$, $V_i \neq \emptyset$. Voor elk punt $v$ van $G_i$ stellen we $v^{\perp i}$ gelijk aan de verzameling van buren van $v$ in $G_i$. Een surjectieve afbeelding $f : V_1 \to V_2$ is dan een bedekkende afbeelding als voor elke $v$ van $V_1$ de restrictie van $f$ op $v^{\perp 1}$ een bijectie vormt tussen $v^{\perp 1}$ en $f(v)^{\perp 2}$. Als zo een afbeelding bestaat, dan noemen we $G_1$ een bedekking van $G_2$.*

**Lemma 7.8.** *Als $G_2$ samenhangend is, en $f$ is een bedekkende afbeelding van $G_1$ naar $G_2$, dan bestaat er een $m \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ zodat voor elke $v \in G_2$ geldt dat $|f^{-1}(v)| = m$.*

**Bewijs.** Door de samenhangendheid van $G_2$ moeten we enkel bewijzen dat voor twee adjacente punten $v_1$ en $v_2$ in $G_2$ geldt dat $|f^{-1}(v_1)| = |f^{-1}(v_2)|$. Stel dat $|f^{-1}(v_1)| = m$, dan vinden we $m$ punten $w_i$, $i \in \{1, .., m\}$ waarvoor de restrictie van $f$ tot $w_i^{\perp 1}$ een bijectie is tussen $w_i^{\perp 1}$ en $v_1^{\perp 2}$. Doordat $v_2$ een buur is van $v_1$, vinden we voor elke $w_i$, $i \in \{1, .., m\}$ een buur $z_i$ die door $f$ wordt afgebeeld op $v_2$. Er kunnen geen andere punten $a$ zijn die afgebeeld worden op $v_2$, want anders zouden we buren $b$ van $a$ vinden die worden afgebeeld op $v_1$. Er zijn dus exact $m$ punten die worden afgebeeld op $v_2$. Het lemma volgt nu door inductie. $\square$

**Definitie 7.9.** *In het geval beschreven in bovenstaand lemma noemen we $G_1$ een $m$-voudige bedekking van $G_2$.*

**Lemma 7.10.** *Als we drie punten $x$, $y_1$ en $y_2$ van $S$ nemen met $y_1, y_2 \in \Gamma_3(x)$ zodanig dat $y_1$ en $y_2$ in dezelfde samenhangende component $C$ van $\Gamma_x$ liggen, dan is $G_{x,y_1} = G_{x,y_2}$. Voor elk punt is de verzameling $\theta_{x,C}(y) := \Gamma_2(y) \bigcap \Gamma_1(x)$ gelijk aan een punt in $G_{x,y_1} = G_{x,y_2}$. Voor een rechte $L$ in $B(x, y_1) = B(x, y_2)$ en twee $L$-adjacente punten $z_1$ en $z_2$ van $C$ geldt dat $\theta_{x,C}(z_1)$ en $\theta_{x,C}(z_2)$ twee $L$-adjacente punten zijn van $G_{x,y_1} = G_{x,y_2}$. Bijgevolg is $\theta_{x,C}$ een bedekkende afbeelding van $C$ naar $G_{x,y_1} = G_{x,y_2}$.*

**Bewijs.** We nemen twee adjacente punten $z_1$ en $z_2$ in $C$. We noemen $\Gamma_1(x) \bigcap \Gamma_2(z_1) := \{x_1^+, ..., x_9^+\}$ en voor elke $i \in \{1, ..., 9\}$ schrijven we $x_i^-$ voor het punt op $xx_i^+$ verschillend van $x$ en $x_i^+$. Door Lemma 7.3 weten we dat $B(x, z_1) = B(x, z_2)$ wat wil zeggen dat de rechten $xx_i^+$ net de rechten zijn door $x$ die punten bevatten op afstand 2 van $z_2$. Hieruit volgt dat $\Gamma_1(x) \bigcap \Gamma_2(z_2) := \{x_1^{e_1}, ..., x_9^{e_9}\}$ met $e_i \in \{+, -\}$ voor elke $i$. Omdat $z_1$ en $z_2$ adjacent zijn en beide op afstand 3 van $x$ liggen, is er nog een derde punt $z$ op $z_1z_2$ dat op afstand 2 van $x$ ligt en dus hebben $x$ en $z$ een unieke gemeenschappelijke buur. Deze buur zal in $\Gamma_1(x) \bigcap \Gamma_2(z_1)$ liggen en is dus gelijk aan een $x_j^+$ voor een bepaalde $j \in \{1, ..., 9\}$. Omdat $x_j^+$ duidelijk ook in $\Gamma_1(x) \bigcap \Gamma_2(z_2)$ ligt, is $e_j = +$. Veronderstel omgekeerd $e_j = +$ voor een bepaalde $j \in \{1, ..., 9\}$. Omdat $d(x_j^+, z_1) = d(x_j^+, z_2) = 2$, moet $d(x_j^+, z) = 1$. Het punt $x_j^+$ is dus de unieke gemeenschappelijke buur van $x$ en $z$. Omdat deze buur uniek is, weten we dat $e_i = -$ voor alle $i \neq j$. Als er immers een $e_k = +$ zou zijn voor een $k \neq j$, dan vinden we op analoge wijze dat $d(z, x_k^+) = 2$, strijdig met $t_2 = 0$. We hebben nu twee $xx_j^+$-adjacente punten $z_1$ en $z_2$ in $C$ en twee $xx_j^+$-adjacente punten $\theta_{x,C}(z_1) = \Gamma_1(x) \bigcap \Gamma_2(z_1)$ en $\theta_{x,C}(z_2) = \Gamma_1(x) \bigcap \Gamma_2(z_2)$ in $G_{x,z_1}$. Dit bewijst het laatste deel van het lemma.

De puntenverzameling van $G_{x,z_1}$ bestaat uit alle verzamelingen $\{x_1^{e'_1}, ..., x_9^{e'_9}\}$ met $e'_i \in \{+, -\}$ en $e'_1 \cdots e'_9 = +$. De puntenverzameling van $G_{x,z_2}$ bestaat uit alle verzamelingen $\{x_1^{e'_1}, ..., x_9^{e'_9}\}$ met $e'_i \in \{+, -\}$ en voor een oneven aantal $e'_i$ moet $e'_i = e_i$. Omdat $e_ie'_i = +$ als $e_i = e'_i$ en $e_ie'_i = -$ als $e_i \neq e'_i$, kunnen we dit ook schrijven als $(e_1e'_1) \cdots (e_9e'_9) = +$. Omdat ook $e_1 \cdots e_9 = +$, komt deze voorwaarde overeen met $e'_1 \ldots e'_9 = +$. We vinden dus dat de puntenverzamelingen van $G_{x,z_1}$ en $G_{x,z_2}$ gelijk zijn, waaruit volgt dat $G_{x,z_1}$ en $G_{x,z_2}$ ook gelijk zijn. Dit bewijst het eerste deel van het lemma voor adjacente punten. Omdat $C$ samenhangend is, geldt dit door inductie ook voor alle punten van $C$. $\square$

# 3 De verzameling $C_x$ en de meetkunde $D_x$

**Definitie 7.11.** *Voor elk punt $x$ van $S$ en elke $C \in C_x$ definiëren we $A_{x,C}$ zodanig dat $C$ een $A_{x,C}$-voudige bedekking is van $G_{x,y}$ met $y$ een willekeurig punt uit $C$ en met bijbehorende bedekkende afbeelding $\theta_{x,C}$.*

We weten dat door $\theta_{x,C}$ het aantal punten uit $C$ dat wordt afgebeeld op éénzelfde punt van $G_{x,y}$ gelijk is aan $A_{x,C}$. Hieruit halen we dat

$$|C| = A_{x,C}|G_{x,y}| = 256A_{x,C}.$$

**Lemma 7.12.** *Voor elk punt $x$ en elke $C \in C_x$ is $A_{x,C} \geq 2$.*

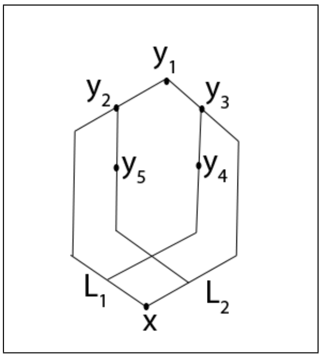
**Bewijs.** Als we een willekeurig punt $y_1$ in $C$ en twee verschillende rechten $L_1$ en $L_2$ in $B(x, y_1)$ nemen, dan is er een uniek punt $y_2$ dat $L_1$-adjacent is aan $y_1$ en een uniek punt $y_3$ dat $L_2$-adjacent is aan $y_1$. Omdat $B(x, y_1) = B(x, y_2) = B(x, y_3)$, vinden we ook een uniek punt $y_4$ dat $L_1$-adjacent is aan $y_3$ en een uniek punt $y_5$ dat $L_2$-adjacent is aan $y_2$ (zie Figuur 7.2).

Als we nu $\theta_{x,C}(y_1) = (+, +, +, +, +, +, +, +, +)$ stellen, waarbij de eerste positie overeenkomt met de rechte $L_1$ en de tweede positie met de rechte $L_2$, dan vinden we

$$\theta_{x,C}(y_1) = (+, +, +, +, +, +, +, +, +)$$

$$\theta_{x,C}(y_2) = (+,-,-,-,-,-,-,-,-)$$
$$\theta_{x,C}(y_3) = (-,+,-,-,-,-,-,-,-)$$
$$\theta_{x,C}(y_4) = (-,-,+,+,+,+,+,+,+)$$
$$\theta_{x,C}(y_5) = (-,-,+,+,+,+,+,+,+)$$
.

We zien dat $\theta_{x,C}(y_4) = \theta_{x,C}(y_5)$. Als nu $y_4 = y_5$, dan zouden $y_1$ en $y_4 = y_5$ minstens twee gemeenschappelijke buren $y_2$ en $y_3$ hebben. Dit zou betekenen dat $t_2 \geq 1$, wat ons een strijdigheid levert. De punten $y_4$ en $y_5$ moeten bijgevolg verschillend zijn. We vinden zo al twee punten die hetzelfde beeld hebben onder $\theta_{x,C}$, dus moet $A_{x,C} \geq 2$. □




Figuur 7.2: Verduidelijking bij Lemma 7.12

**Lemma 7.13.** *Voor elk punt $x$ in $S$ vinden we $|C_x| \leq 25$ en $\sum_{C \in C_x} A_{x,C} = 50$ met gelijkheid in de eerste ongelijkheid als $A_{x,C} = 2$ en $|C| = 512$ voor elke $C \in C_x$.*

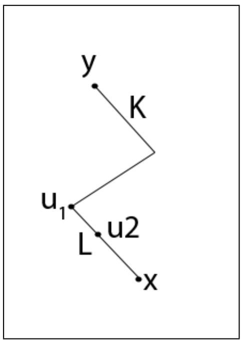
**Bewijs.** We weten dat $12800 = |\Gamma_3(x)| = \sum_{C \in C_x} |C| = \sum_{C \in C_x} 256A_{x,C}$, waaruit we vinden dat $\sum_{C \in C_x} A_{x,C} = \frac{12800}{256} = 50$. Omdat $A_{x,C} \geq 2$, kunnen er maar hoogstens 25 elementen in de verzameling $C_x$ zitten. Als er nu exact 25 elementen in $C_x$ zitten, dan is $A_{x,C} = 2$ voor elke $C$ en vinden we voor elke $C$ dat $|C| = 256A_{x,C} = 512$. □

**Lemma 7.14.** *Neem een punt $x$ in $S$ en een 50-tupel $(y_1, ..., y_{50})$ van punten in $\Gamma_3(x)$ met de eigenschap dat voor elke $C \in C_x$ er exact $A_{x,C}$ elementen $i \in \{1, 2, ..., 50\}$ zijn waarvoor $y_i \in C$. Met $B_i := B(x, y_i)$ geldt het volgende:*

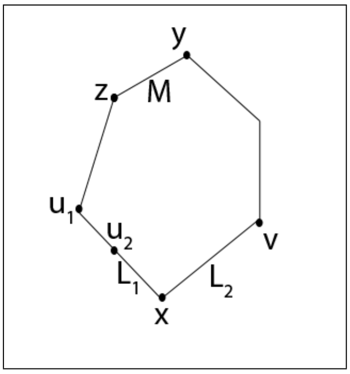
- *voor elke rechte $L \in L_x$ zijn er exact 18 elementen $i \in \{1, 2, ..., 50\}$ waarvoor $L \in B_i$,*
- *voor elke twee verschillende rechten $L_1, L_2 \in L_x$ zijn er exact 6 elementen $i \in \{1, 2, ..., 50\}$ waarvoor $L_1, L_2 \in B_i$.*

**Bewijs.** Doordat $|C| = 256A_{x,C}$, weten we dat voor elke component $C \in C_x$ geldt dat $|C| > A_{x,C}$. We kunnen dus $A_{x,C}$ punten kiezen in elke component $C$. Door middel van het vorige lemma vinden we zo exact 50 punten. We kunnen dus steeds een dergelijk 50-tupel construeren.

We nemen eerst een willekeurige rechte $L \in L_x$ en de verzameling $F$ van punten $y \in \Gamma_3(x)$ waarvoor $L \in B(x, y)$. Als voor een bepaalde $C \in C_x$ en een bepaalde $y \in C$ geldt dat $L \in B(x, y)$, dan weten we dat dit voor elke $y' \in C$ geldt. $F$ moet dus gelijk zijn aan $\bigcup_{C \in I} C$ met $I$ een bepaalde deelverzameling van $C_x$. Het aantal $i \in \{1, ..., 50\}$ waarvoor $L \in B_i$ is dan gelijk aan $\sum_{C \in I} A_{x,C} = \sum_{C \in I} \frac{|C|}{256} = \frac{|F|}{256}$. Nemen we nu $L = \{x, u_1, u_2\}$, dan stellen we $F_i$, $i \in \{1, 2\}$ gelijk aan de verzameling van punten $y \in F$ waarvoor $\{u_i\} = L \bigcap \Gamma_2(y)$. $F$ is dan gelijk aan de verzameling $F_1 \bigcup F_2$. We kunnen nu $|F_1| = |F_2|$ berekenen door koppels $(y, K)$ te tellen met $y \in F_1$ en $K$ een rechte door $y$ die een buur van $u_1$ bevat (zie Figuur 7.3). We vinden zo enerzijds $|F_1|(1 + t_2)$ koppels en anderzijds $ts(t - t_2)$ rechten $K$ met elk $s$ mogelijke punten $y$, dus $|F_1| = |F_2| = \frac{s^2 t(t-t_2)}{1+t_2} = 2304$. Zo vinden we $|F| = |F_1| + |F_2| = 4608$ en $\sum_{C \in I} A_{x,C} = \frac{4608}{256} = 18$, wat het gestelde bewijst.




Figuur 7.3: Verduidelijking bij Lemma 7.14




Figuur 7.4: Verduidelijking bij Lemma 7.14 met $i = 1$

We nemen nu twee willekeurige rechten $L_1, L_2 \in L_x$ en de verzameling $F$ van punten $y \in \Gamma_3(x)$ waarvoor $L_1, L_2 \in B(x, y)$. Analoog aan het geval van één rechte, weten we dat $F = \bigcup_{C \in J} C$ met $J$ een deelverzameling van $C_x$. Het aantal $i \in \{1, ..., 50\}$ waarvoor $L_1, L_2 \in B_i$ is dus gelijk aan $\sum_{C \in J} A_{x,C} = \sum_{C \in J} \frac{|C|}{256} = \frac{|F|}{256}$. We stellen $L_1 = \{x, u_1, u_2\}$ en we stellen $F_i, i \in \{1, 2\}$ gelijk aan de verzameling punten $y \in F$ waarvoor $u_i = L_1 \bigcap \Gamma_2(y)$. Hierdoor is opnieuw $F = F_1 \bigcup F_2$. Via een dubbele telling zoeken we nu het aantal punten van $F_1$.

We tellen hiervoor de koppels $(y, M)$ met $y \in F_1$ en $M$ de rechte door $y$ die een buur bevat van $u_1$ en die parallel is aan $L_2$. We vinden zo enerzijds $|F_1|t_2 = |F_1|$ koppels. Voor elk punt $y$ is er maar één rechte $M$ mogelijk doordat $t_2 = 0$. Stellen we $\{v\} := L_2 \bigcap \Gamma_2(y)$ en stellen we $z$ gelijk aan de buur van $u_1$ die op $M$ ligt, dan is $d(x, z) = d(y, v) = 2$. Doordat $d(x, y) = 3$, moeten $M$ en $L_2$ parallel zijn (zie Figuur 7.4). Anderzijds zijn er $st = 48$ mogelijke buren $z$ van $u_1$ die niet op $L_1$ liggen. We stellen $v$ gelijk aan een punt van $L_2 \backslash x$. Door elk punt $z$ vinden we dan $t_2 - t_2$ rechten $M$ die een punt $y$ bevatten op afstand 2 van $v$. Doordat $d(x, z) = d(y, v) = 2$ en $d(y, x) = 3$, zijn $M$ en $L_2$ dan parallel. Het derde punt op $M$ naast $z$ en $y$ zal dus ook op afstand 2 liggen van $L_2$ en zal dus ook in $F_1$ liggen. Zo vinden we dus $48 \times 8 \times 2 = 768$ koppels $(y, M)$. Hieruit volgt dat $|F_1| = 767$ en dat $|F| = |F_1| + |F_2| = 2 \times 768 = 1536$. Hieruit vinden we dat $\sum_{C \in J} A_{x,C} = \frac{1536}{256} = 6$, wat het gestelde bewijst. □

**Lemma 7.15.** *Als $x$ een punt van $S$ is, dan is*

- $|C_x| = 25$,
- *elke $C \in C_x$ bevat 512 punten,*
- *voor elke $C \in C_x$ is $A_{x,C} = 2$,*
- *als $y, y' \in \Gamma_3(x)$ in een verschillende samenhangende component van $\Gamma_x$ liggen, dan is $B(x, y) \neq B(x, y')$.*

**Bewijs.** Stel $(y_1, ..., y_{50})$ en $(B_1, ..., B_{50})$ zoals in Lemma 7.14 en definieer een $25 \times 50$-matrix $M$ over $\mathbb{R}$ waarbij de $t + 1 = 25$ rijen geïndexeerd worden door de rechten in $L_x$ en de 50 kolommen door de blokken $B_i \in B_x$ met $1 \leq i \leq 50$ en waarbij $M_{K,B_i}$ gelijk is aan 1 als $K \in B_i$ en gelijk is aan 0 als dit niet het geval is. Als $y_i$ en $y_j$ in dezelfde samenhangende component liggen, dan is $B_i = B_j$, dus zijn de $i$-de en $j$-de kolom van $M$ gelijk. Het aantal verschillende kolommen is dus kleiner dan of gelijk aan $|C_x|$. Dit wil ook zeggen dat het aantal lineair onafhankelijke kolommen kleiner is dan of gelijk is aan $|C_x|$. Dit betekent dankzij Lemma 7.13 dat rank$(M) \leq |C_x| \leq 25$. Als echter rank$(M) = 25$, dan moet $|C_x| = 25$. Nemen we dan $i_1, i_2 \in \{1, ..., 50\}$ zodanig dat $y_{i_1}$ en $y_{i_2}$ in verschillende componenten van $\Gamma_x$ liggen, dan moet $B_{i_1} \neq B_{i_2}$. Stel immers dat $B_{i_1} = B_{i_2}$, dan geldt voor elke $y_{j_1}$ in de samenhangende component van $y_{i_1}$ en elke $y_{j_2}$ in de samenhangende component van $y_{i_2}$ dat $B_{j_1} = B_{i_1} = B_{i_2} = B_{j_2}$, dus dan zouden de kolommen die overeenkomen met punten uit beide componenten gelijk zijn, waardoor rank$(M) < |C_x|$, een strijdigheid. Als we dus het eerste puntje hebben bewezen, dan volgt hierdoor direct het vierde puntje.

Als we $MM^T$ bekijken, dan zien we dat het element $(MM^T)_{L,K}$ gelijk is an het aantal $i \in \{1, ..., 50\}$ waarvoor $L, K \in B_i$, dus wegens Lemma 7.14 krijgen we $MM^T = 12I + 6J$ met $I$ de $25 \times 25$-eenheidsmatrix en $J$ de $25 \times 25$-matrix bestaande uit enkel enen. Als we in deze matrix eerst de eerste rij aftrekken van alle andere rijen, en daarna alle kolommen bij de eerste optellen, zien we als volgt dat we een niet-singuliere bovendriehoeksmatrix krijgen:

$$\begin{bmatrix} 18 & 6 & 6 & \cdots & 6 \\ 6 & 18 & 6 & \cdots & 6 \\ 6 & 6 & 18 & \cdots & 6 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 6 & 6 & 6 & \cdots & 18 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 18 & 6 & 6 & \cdots & 6 \\ -12 & 12 & 0 & \cdots & 0 \\ -12 & 0 & 12 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -12 & 0 & 0 & \cdots & 12 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 162 & 6 & 6 & \cdots & 6 \\ 0 & 12 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 12 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 12 \end{bmatrix}.$$

We hebben dus dat $\mathrm{rank}(M) = \mathrm{rank}(MM^T) = 25$. Met behulp van Lemma 7.13 vinden we zo dat ook de eerste drie puntjes kloppen. □

**Definitie 7.16.** *Een 2-design noemen we symmetrisch als het evenveel punten als blokken bevat. Het punt-rechte duale van een symmetrisch 2-design is opnieuw een 2-design met dezelfde parameters (zie [11]).*

**Lemma 7.17.** *De punt-rechte meetkunde $D_x$ is een symmetrisch 2-(25,9,3)-design voor elk punt $x \in S$.*

**Bewijs.** Doordat $t = 24$, weten we al dat $|L_x| = 25$. Het design $D_x$ bevat dus 25 punten. We weten door het vorige lemma dat $\Gamma_x$ exact 25 componenten bevat en dat we aan elke component $C$ exact één verzameling $B(x, y)$ kunnen koppelen met $y \in C$. Het aantal rechten in een blok $B(x, y)$ is ook net het aantal rechten door $x$ dat een punt bevat op afstand 2 van $y$. $D_x$ bevat dus 25 blokken bevat en elk blok bevat 9 rechten. Uit het tweede deel van Lemma 7.14 vinden we dat er voor twee punten $L_1, L_2$ van het design 6 punten $y_i, 1 \leq i \leq 50$ zijn waarvoor $L_1, L_2 \in B_i$. Door het vorige lemma weten we dat er per component $C \in C_x$ altijd twee punten in 50-tupel $\{y_1, ..., y_{50}\}$ liggen, dus dat er maar drie verschillende blokken $B_i$ zijn waarvoor $L_1, L_2 \in B_i$. Dit bewijst het lemma. □

Door de symmetrie van $D_x$ is het punt-rechte duale van $D_x$ ook een 2-(25,9,3)-design. Dit betekent dat de doorsnede van twee verschillende blokken $B_1, B_2 \in B_x$ gelijk is aan 3.

# 4 Paden tussen punten van $\Gamma_x$

**Lemma 7.18.** *Neem een punt $x$ van $S$, een component $C \in C_x$ en $y \in \Gamma_4(x)$. Er zijn dan ten hoogste twee rechten door $y$ die een punt van $C$ bevatten. Als $y_1$ en $y_2$ twee punten zijn van $C$ collineair met $y$, dan is $\theta_{x,C}(y_1) = \theta_{x,C}(y_2)$.*

**Bewijs.** Stel dat er drie niet noodzakelijk verschillende rechten $L_1, L_2, L_3$ zijn door $y$ die een punt bevatten van $C$. We noemen $y_i := L_i \bigcap C$, $1 \leq i \leq 3$. Omdat $y_i$ voor elke $i$ op een kortste pad van $y$ naar $x$ ligt, vinden we

$$\begin{aligned} \theta_{x,C}(y_i) &= \Gamma_1(x) \bigcap \Gamma_2(y_i) \\ &= \bigcup_{L \in B(x,y_i)} (L \bigcap \Gamma_2(y_i)) \\ &= \bigcup_{L \in B(x,y_i)} (L \bigcap \Gamma_3(y)). \end{aligned}$$

Omdat de punten $y_i$, $1 \leq i \leq 3$ in dezelfde component $C$ liggen, is echter $B(x, y_1) = B(x, y_2) = B(x, y_3)$, dus ook $\theta_{x,C}(y_1) = \theta_{x,C}(y_2) = \theta_{x,C}(y_3)$. Omdat $A_{x,C} = 2$, moeten echter twee van deze drie rechten samenvallen. □

**Lemma 7.19.** *Als $x \in S$, $y \in \Gamma_4(x)$ en $y_1$ en $y_2$ twee verschillende punten zijn in $\Gamma_1(y) \bigcap \Gamma_3(x)$, dan is $|B(x, y_1) \bigcap B(x, y_2)| = 3$.*

**Bewijs.** Stel dat $|B(x, y_1) \bigcap B(x, y_2)| \neq 3$, dan is door het gevolg van Lemma 7.17 $B(x, y_1) = B(x, y_2)$. Door het vierde puntje van Lemma 7.15 liggen $y_1$ en $y_2$ nu in dezelfde samenhangende component $C$ van $\Gamma_x$. Uit het vorige lemma volgt nu dat $\theta_{x,C}(y_1) = \theta_{x,C}(y_2) := \{u_1, ..., u_9\}$. Aangezien we een punt $y$ en een punt $x \in \Gamma_4(y)$ hebben, weten we door het vorige lemma dat er voor elke component van $C_y$ hoogstens twee rechten door $x$ zijn die een punt bevatten van deze component. Bijgevolg kunnen er geen drie punten $u_i, u_j, u_k$ met $i, j, k \in \{1, ..., 9\}$ in dezelfde component $C \in C_y$ zitten. De verzameling $\{u_1, ..., u_9\}$ bevat dus punten van minstens vijf verschillende componenten $C \in C_y$. Omdat voor twee punten $u, u'$ uit dezelfde component $C \in C_y$ geldt dat $B(y, u) = B(y, u')$, weten we dat $|\{B(y, u_1), ..., B(y, u_9)\}| \geq 5$. Elk van deze blokken bevat ook de rechten $yy_1$ en $yy_2$ omdat alle punten $u_1, ..., u_9$ in de verzameling $\theta_{x,C}(y_1) = \theta_{x,C}(y_2)$ liggen. Dit kan niet, want uit Lemma 7.17 weten we dat er door de twee verschillende rechten $yy_1$ en $yy_2$ exact drie blokken gaan. □

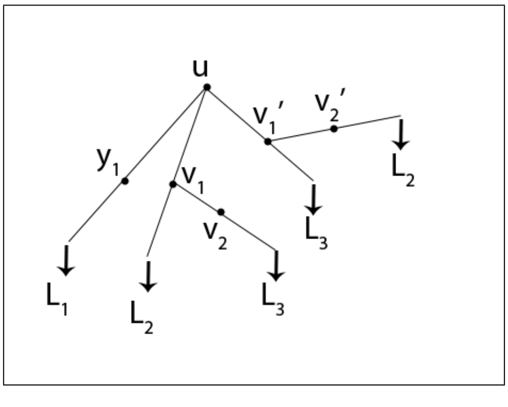
**Lemma 7.20.** *Als $x \in S$, $y \in \Gamma_4(x)$ en $C \in C_x$, dan is er exact één rechte door $y$ die een punt bevat van $C$.*

**Bewijs.** Stellen we $\Gamma_3(x) \bigcap \Gamma_1(y) = \{y_1, ..., y_{25}\}$, dan vinden we dankzij het vorige lemma dat alle blokken $B(x, y_1), ..., B(x, y_{25})$ verschillend zijn. De doorsnede van twee van deze blokken heeft immers altijd grootte 3. We vonden in Lemma 7.17 dat er maar 25 blokken in $D_x$ zijn, dus moeten dit net de blokken $B(x, y_1), ..., B(x, y_{25})$ zijn. Neem nu een element $y' \in C$ en neem $i$ zodanig dat $y_i$ het unieke element van $\{y_1, ..., y_{25}\}$ is waarvoor $B(x, y') = B(x, y_i)$. Dit kan enkel als $y_i \in C$, dus als $yy_i$ de enige rechte is door $y$ die een punt bevat van $C$. □

We nemen nu een punt $x$ van $S$ en twee verschillende blokken $B_1$ en $B_2$ uit $B_x$. Door Lemma 7.19 weten we dat $|B_1 \bigcap B_2| = 3$. Stel dus $B_1 \bigcap B_2 := \{L_1, L_2, L_3\}$ en $B_1 := \{L_1, ..., L_9\}$. We definiëren ook de componenten $C_1, C_2 \in C_x$ zodanig dat het blok $B_i$, $i \in \{1, 2\}$ overeenkomt met de component $C_i$, $i \in \{1, 2\}$ op de volgende manier: voor elk punt $w_i$ in $C_i$ moet $B_i = B(x, w_i)$. We nemen nu een willekeurig punt $y_1 \in C_1$. We noteren de punten op $L_i$, $1 \leq i \leq 9$ die op afstand 2 van $y_1$ liggen als $x_i^+$, en het punt op $L_i$ verschillend van $x$ en $x_i^+$ als $x_i^-$. Nu is $\theta_{x,C_1}(y_1) = \{x_1^+, ..., x_9^+\}$ een punt van $G_{x,y_1}$. Uit de definitie van $G_{x,y_1}$ weten we dat $\{x_1^+, x_2^+, x_3^+, x_4^-, ..., x_9^-\}$ ook een punt is van $G_{x,y_1}$. Omdat $A_{x,C} = 2$, weten we dat er exact twee punten $y_2, y_2' \in C_1$ zijn waarvoor $\theta_{x,C}(y_2) = \theta_{x,C}(y_2') = \{x_1^+, x_2^+, x_3^+, x_4^-, ..., x_9^-\}$.

**Lemma 7.21.** *De punten $y_2, y_2'$ liggen op afstand 3 van $y_1$.*

**Bewijs.** We hadden een component $C_1$ dat het punt $y_1$ bevatte en een rechte $L_1$ in $B(x, y_1)$, dus hebben we een uniek punt $u$ in $C_1$ dat $L_1$-adjacent is aan $y_1$, een uniek punt $v_1$ in $C_1$ dat $L_2$-adjacent is aan $u$, een uniek punt $v_2$ in $C_1$ dat $L_3$-adjacent is aan $v_1$, een uniek punt $v_1'$ in $C_1$ dat $L_3$ adjacent is aan $u$ en een uniek punt $v_2'$ in $C_1$ dat $L_2$-adjacent is aan $v_1'$ (zie Figuur 7.5).




Figuur 7.5: Verduidelijking bij Lemma 7.21

We vinden nu paden $y_1, u, v_1, v_2$ en $y_1, u, v_1', v_2'$ van $y_1$ naar respectievelijk $v_2$ en $v_2'$ die beide lengte 3 hebben. De punten $v_2$ en $v_2'$ kunnen niet dichter bij $y_1$ liggen. Als immers $d(y_1, v_2) = 2$, dan zou $v_2$ op afstand 2 liggen van twee punten op de rechte $y_1u$, dus collineair zijn met een punt op deze rechte. Omdat echter $t_2 = 0$ is, hebben $u$ en $v_2$ een uniek gemeenschappelijke buur $v_1$, dus moet $v_1$ op $y_1u$ liggen. Dit betekent dat alle punten op deze rechte op afstand 3 van $x$ liggen, een strijdigheid. Als $d(y_1, v_2) = 1$

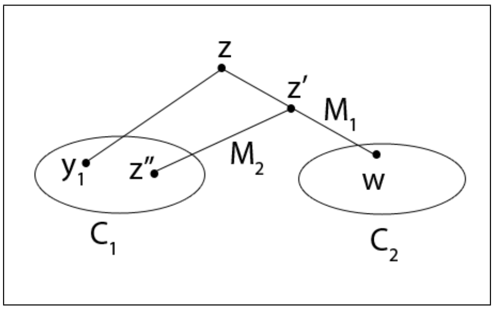
is, dan vinden we twee paden $u, y_1, v_2$ en $u, v_1, v_2$ van $u$ naar $v_2$. Door $t_2 = 0$ kan dit enkel als $y_1 = v_1$, maar dan is $u$ zowel $L_1$-adjacent als $L_2$ adjacent met $y_1$, wat resulteert in twee verschillende paden van $z$ naar $x$, met $z$ het punt op de rechte $uy_1$ op afstand 2 van $x$. Dit is opnieuw strijdig met $t_2 = 0$. Er geldt dus dat $d(y_1, v_2) = d(y_1, v_2') = 3$. Als $v_2 = v_2'$, dan vinden we twee paden $u, v_1, v_2$ en $u, v_1', v_2$ van $u$ naar $v_2$. Deze paden zijn noodzakelijk verschillend want $u$ is $L_3$-adjacent aan $v_1'$ en $L_2$-adjacent aan $v_1$. Dit is opnieuw strijdig met $t_2 = 0$, dus moet $v_2 \neq v_2'$. We zoeken nu $\theta_{x,C_1}(v_2)$ en $\theta_{x,C_1}(v_2')$, gebruikmakend van de veronderstelling dat $L_1 = xx_1^+$, $L_2 = xx_2^+$ en $L_3 = xx_3^+$:

$$\begin{aligned}
\theta_{x,C_1}(y_1) &= \{x_1^+, x_2^+, x_3^+, x_4^+, ..., x_9^+\},\\
\theta_{x,C_1}(u) &= \{x_1^+, x_2^-, x_3^-, x_4^-, ..., x_9^-\},\\
\theta_{x,C_1}(v_1) &= \{x_1^-, x_2^-, x_3^+, x_4^+, ..., x_9^+\},\\
\theta_{x,C_1}(v_1') &= \{x_1^-, x_2^+, x_3^-, x_4^+, ..., x_9^+\},\\
\theta_{x,C_1}(v_2) &= \{x_1^+, x_2^+, x_3^+, x_4^-, ..., x_9^-\},\\
\theta_{x,C_1}(v_2') &= \{x_1^+, x_2^+, x_3^+, x_4^-, ..., x_9^-\}.
\end{aligned}$$

We vinden zo dat $\theta_{x,C_1}(v_2) = \theta_{x,C_1}(v_2') = \{x_1^+, x_2^+, x_3^+, x_4^-, ..., x_9^-\} = \theta_{x,C_1}(y_2) = \theta_{x,C_1}(y_2')$. Door $A_{x,C} = 2$ moet $\{v_2, v_2'\} = \{y_2, y_2'\}$. We vinden dat $y_2$ en $y_2'$ beide op afstand 3 van $y_1$ liggen. □

We hebben nu een pad van $y_1$ naar $v_2$ gevonden via punten die respectievelijk $L_1$-, $L_2$- en $L_3$-adjacent zijn aan het vorige punt van het pad, en een pad van $y_1$ naar $v_2'$ via punten die respectievelijk $L_1$-, $L_3$- en $L_2$-adjacent zijn aan het vorige punt van het pad. Door enkel paden te bekijken die beginnen in $y_1$ en met punten die $L_1$-, $L_3$- of $L_2$-adjacent zijn aan het vorig punt op het pad (zo zijn er $3! = 6$) vinden we 6 paden met een eindpunt $z$ met $\theta_{x,C_1}(z) = \{x_1^+, x_2^+, x_3^+, x_4^-, ..., x_9^-\}$, dus met $z \in \{y_2, y_2'\}$. Wegens symmetrie vinden we dus drie paden in $C_1$ van $y_1$ naar $y_2$.

Omdat nu $y_2$ en $y_2'$ op afstand 3 van $y_1$ liggen, vinden we in totaal $(t_3 + 1)(t_2 + 1) = 9$ paden met lengte 3 van $y_1$ naar elk van deze twee punten. Om nu een strijdigheid te bekomen, zullen we aantonen dat voor elk van de punten $z \in \Gamma_4(x) \bigcap \Gamma_1(y_1)$ er een pad $y_1, z, z', z''$ met $z'' \in \{y_2, y_2'\}$ bestaat van lengte 3. Zo vinden we dus $|\Gamma_4(x) \bigcap \Gamma_1(y_1)| = s(t - t_3) = 32$ paden, wat strijdig is met de 18 eerder gevonden paden van $y_1$ naar de punten $y_2$ en $y_2'$.




Figuur 7.6: Verduidelijking bij de constructie van de paden $y_1zz'z''$

Neem $z \in \Gamma_4(x) \bigcap \Gamma_1(y_1)$ en de unieke rechte $M_1$ door $z$ die een uniek punt $w$ bevat van $C_2$. Het punt op $M_1$ verschillend van $z$ en $w$ noemen we $z'$. Omdat $z' \in \Gamma_4(x)$, is er een unieke rechte $M_2$ door $z'$ die een punt $z''$ van $C_1$ bevat (zie Figuur 7.6). We hadden de rechten $L_1, L_2$ en $L_3$ gedefinieerd door te stellen dat $B_1 \bigcap B_2 := \{L_1, L_2, L_3\}$, dus voor elk punt $a \in C_1 \bigcup C_2$ geldt $L_i \in B(x, a)$, $1 \leq i \leq 3$. Zo vinden we dat $L_i \in B(x, y_1) \bigcap B(x, z'') \bigcap B(x, w)$. Nu geldt voor elke $i \in \{1, 2, 3\}$ dat $\Gamma_3(z) \bigcap L_i = \Gamma_2(y_1) \bigcap L_i$. Zo vinden we $\Gamma_2(y_1) \bigcap L_i = \Gamma_3(z) \bigcap L_i = \Gamma_2(w) \bigcap L_i = \Gamma_3(z') \bigcap L_i = \Gamma_2(z'') \bigcap L_i$ voor $1 \leq i \leq 3$.

Neem nu $i \in \{4, 5, ..., 9\}$. Als $\Gamma_3(z) \bigcap L_i = \Gamma_3(z') \bigcap L_i = \{v\}$, dan is $d(v, z) = d(v, z') = 3$ dus $d(v, w) = 2$ en $L_i \in B(x, w) = B_2$. Dit is een strijdigheid want $L_i$ zit in $B_1 \backslash B_2$. Hieruit vinden we dus dat $\Gamma_2(y_1) \bigcap L_i = \Gamma_3(z) \bigcap L_i \neq \Gamma_3(z') \bigcap L_i = \Gamma_2(z'') \bigcap L_i$. We zoeken nu het beeld van het punt $z''$ onder $\theta_{x,C_1}$:

$$\theta_{x,C_1}(y_1) = \{x_1^+, x_2^+, x_3^+, x_4^+, ..., x_9^+\},$$

$$\theta_{x,C_1}(z'') = \{x_1^+, x_2^+, x_3^+, x_4^-, ..., x_9^-\}.$$

We vinden dus dat $\theta_{x,C_1}(z'') = \theta_{x,C_1}(y_2) = \theta_{x,C_1}(y_2')$, dus moet $z'' \in \{y_2, y_2'\}$.

# Hoofdstuk 8

# Het niet-bestaan van schierzeshoeken met parameters $(s, t_2, t) = (3, 1, 9)$

Om te bewijzen dat er geen schierzeshoeken bestaan met parameters $(s, t_2, t) = (3, 1, 9)$, bekijken we eerst quads met $t_2 = 1$. Daarna bekijken we deze quads in kubussen. Ten slotte bekijken we deze quads dan in een schierzeshoek met parameters $(s, t_2, t) = (3, 1, 9)$. Hieruit zal dan een strijdigheid volgen.

## 1 Quad-quad relaties als $t_2 = 1$

Nemen we een vast quad $Q$ in een hex $H$ met parameters $(s, t_2, t)$ en $t_2 = 1$. Omdat $t_2 = 1$ is, weten we dat $Q$ een rooster is van $(s+1)^2$ punten. We hadden al berekend dat voor een vast punt $x$ geldt dat

$$\begin{aligned}
\Gamma_0(x) &= 1, \\
\Gamma_1(x) &= s(t+1), \\
\Gamma_2(x) &= \frac{s^2(t-t_0)(t-t_1)}{(1+t_1)(1+t_2)} = \frac{s^2t(t+1)}{2}, \\
\Gamma_3(x) &= \frac{s^3(t-t_0)(t-t_1)(t-t_2)}{(1+t_1)(1+t_2)(1+t_3)} = \frac{s^3t(t-1)}{2}.
\end{aligned}$$

Een punt $p$ uit $\Gamma_1(x)$ heeft één buur in $\Gamma_0(x)$ (namelijk $x$ zelf), $s-1$ buren in $\Gamma_1(x)$ (namelijk de punten op $xp$ verschillend van $x$ en $p$), en $st$ buren in $\Gamma_3(x)$, namelijk de punten verschillend van $p$ (zo zijn er $s$ per rechte) op de rechten door $p$ verschillend van $xp$ (zo zijn er $t$). Een punt $p'$ uit $\Gamma_2(x)$ heeft twee buren $z, z'$ in $\Gamma_1(x)$ (doordat $t_2 = 1$), heeft $2(s-1)$ buren in $\Gamma_2(x)$ (namelijk de punten verschillend van $p'$, $z$ en $z'$ op de rechten $p'z$ en $p'z'$) en $s(t-1)$ buren in $\Gamma_3(x)$ (namelijk $s$ punten per rechte verschillend van $pz$ en $pz'$). Een punt in $\Gamma_3(x)$ heeft ten slotte $t+1$ buren in $\Gamma_2(x)$ en alle andere buren (zo zijn er $(s-1)(t+1)$) in $\Gamma_3(x)$.

Voor een vast quad $Q$ vinden we nu $(s+1)^2$ punten in $\Gamma_0(Q)$, namelijk alle punten van $Q$. Een punt van $Q$ heeft $2s$ buren in $Q$ en alle andere buren (zo zijn er $s(t-1)$) in $\Gamma_1(Q)$. Omdat een punt uit $\Gamma_1(Q)$ slechts één buur in $Q$ kan hebben, vinden we $s(s+1)^2(t-1)$ punten in $\Gamma_1(Q)$. Een rechte door zo'n punt $p$ die volledig in $\Gamma_1(Q)$ ligt, moet parallel zijn aan een rechte in $Q$ die de projectie van $p$ in $Q$ bevat. Doordat een punt van $\Gamma_1(Q)$ maar één buur in $Q$ kan hebben, vinden we dat voor een rechte $l$ volledig in $\Gamma_1(Q)$ de punten van $Q$ die het dichtst bij $l$ liggen één rechte vormen. We hebben dus door een punt $p$ in $\Gamma_1(Q)$ twee rechten volledig in $\Gamma_1(Q)$ en één rechte die een punt van $Q$ bevat. We vinden dus $3s-1$ buren in $\Gamma_1(Q)$. Alle overige buren (zo zijn er $s(t-2)$) moeten dus in $\Gamma_2(Q)$ liggen. Een punt in $\Gamma_2(Q)$ is altijd ovoïdaal. Het heeft dus $(t_2+1)|O| = 2(s+1)$ buren in $\Gamma_1(Q)$ met $O$ een ovoïde van $Q$. Zo vinden we $\frac{s^2(s+1)(t-1)(t-2)}{2}$ punten in $\Gamma_2(Q)$.

Als we een ander quad $Q'$ in het hex nemen dat een punt bevat op afstand 2 van $Q$, of dat volledig bevat is in $\Gamma_1(Q)$, dan is $Q'$ één van de volgende types[1] (zie ook Figuur 8.1):

[1]Dit volgt uit het feit dat een rechte die twee punten bevat van $\Gamma_1(Q)$ ofwel volledig in $\Gamma_1(Q)$ ligt, ofwel uit één punt uit $Q$ en $s$ punten uit $\Gamma_1(Q)$.

**(0)** $Q'$ bevat één punt $p$ van $Q$ en bevat bijgevolg $2s$ punten van $\Gamma_1(Q)$, namelijk de punten verschillend van $p$ op de rechten door $p$ in $Q'$,

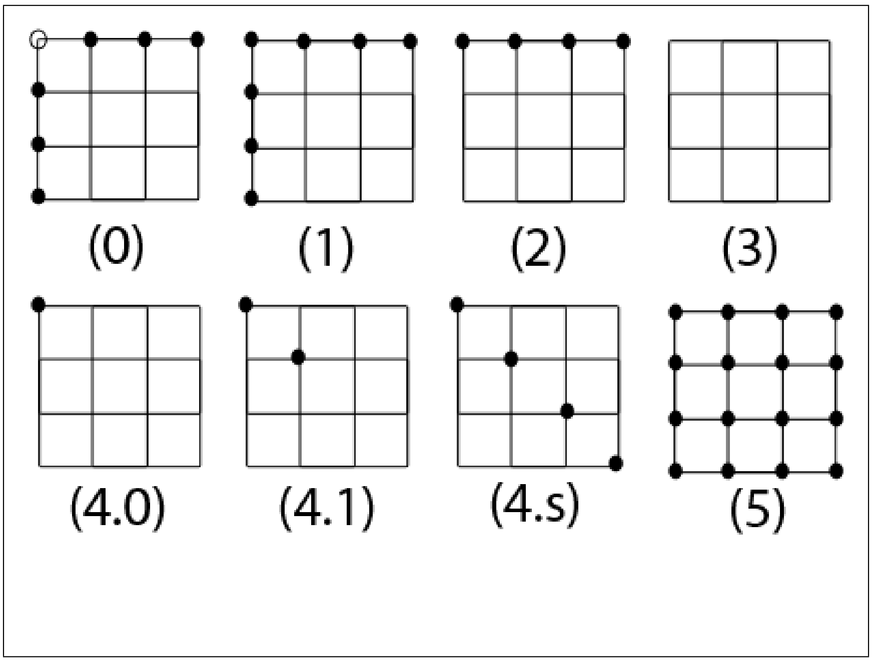
**(1)** $Q' \bigcap \Gamma_1(Q)$ bestaat uit twee snijdende rechten,

**(2)** $Q' \bigcap \Gamma_1(Q)$ bestaat uit één rechte,

**(3)** $Q'$ is volledig bevat in $\Gamma_2(Q)$,

**(4.i)** $Q' \bigcap \Gamma_1(Q)$ bestaat uit $i+1$ punten van een ovoïde van $Q'$, voor $0 \leq i \leq s$,

**(5)** $Q'$ is bevat in $\Gamma_1(Q)$.




Figuur 8.1: Illustratie van de mogelijke relaties tussen de quads $Q$ en $Q'$. Hier staat een lege bol voor een punt in $Q' \bigcap Q$ en een gevulde bol voor een punt in $Q' \bigcap \Gamma_1(Q)$.

We stellen $N_\alpha$ gelijk aan het aantal quads van type $\alpha$ met $\alpha \in \{0, 1, 2, 3, 4.0, 4.1, ..., 4.s, 5\}$. Het aantal quads van type (0) kunnen we gemakkelijk tellen als

$$N_0 = (s+1)^2 \frac{(t-1)(t-2)}{2}. \tag{8.1}$$

We tellen koppels $(x, \{l, l'\})$ met $x$ een punt in $\Gamma_1(Q)$, $l$ en $l'$ twee rechten door $x$ in $\Gamma_1(Q)$. Enerzijds vinden we $N_1 + (s+1)^2 N_5$ zulke koppels. Anderzijds vinden we $s(s+1)^2(t-1)$ punten $x$, en per punt $x$ vinden we exact twee rechten $l, l'$ parallel aan rechten in $Q$. We krijgen

$$N_1 + (s+1)^2 N_5 = s(s+1)^2(t-1). \tag{8.2}$$

Tellen we koppels $(l, Q')$ met $l$ een rechte in $\Gamma_1(Q)$ en $Q'$ een quad door $l$, dan vinden we enerzijds $2N_1 + N_2 + 2(s+1)N_5$ zulke koppels. Anderzijds vinden we $2s(s+1)(t-1)$ rechten in $\Gamma_1(Q)$. Inderdaad, we hebben $s(s+1)^2(t-1)$ punten in $\Gamma_1(Q)$, dus als we de paren $(p, l)$ tellen met $p$ een punt in $\Gamma_1(Q)$, $l$ een rechte in $\Gamma_1(Q)$ en $p \in l$, dan vinden we dat het aantal rechten in $\Gamma_1(l)$ gelijk is aan $\frac{2s(s+1)^2(t-1)}{s+1} = 2s(s+1)(t-1)$. Om nu het aantal quads door een vaste rechte te zoeken, kunnen we gebruik maken van het feit dat twee snijdende rechten een quad bepalen. Opdat het gevonden quad aan de voorwaarden zou voldoen, eisen we dat de vaste rechte zeker een punt gemeenschappelijk heeft met een rechte van het quad dat geen punten van $Q$ bevat. We vinden zo $\frac{(s+1)(t-1)}{(s+1)t_2} = t-1$ quads. We verkrijgen

$$2N_1 + N_2 + 2(s+1)N_5 = 2s(s+1)(t-1)^2. \tag{8.3}$$

We kunnen nu $N_1$ uit (8.2) vervangen in (8.3) wat resulteert in

$$N_2 - 2s(s+1)N_5 = 2s(s+1)(t-1)(t-s-2). \tag{8.4}$$

Anderzijds kunnen we ook $N_5$ uit (8.2) vervangen in (8.3) wat resulteert in

$$2sN_1 + (s+1)N_2 = 2s(s+1)^2(t-1)(t-2). \tag{8.5}$$

We tellen nu koppels $(x, \{l, l'\})$ met $x \in \Gamma_2(Q)$ en $l, l'$ rechten door $x$ die een punt bevatten van $\Gamma_1(Q)$. Enerzijds vinden we $s^2N_0 + s^2N_1 + \sum_{i=1}^{s}(i+1)iN_{4.i}$ zulke koppels. Anderzijds vinden we $\frac{s^2(s+1)(t-1)(t-2)}{2}$ punten in $\Gamma_2(Q)$ die elk op $2(s+1)$ rechten liggen die een punt bevatten van $\Gamma_1(Q)$. We vinden zo $\frac{s^2(s+1)(t-1)(t-2)}{2}\frac{2(s+1)(2(s+1)-1)}{2} = \frac{s^2(s+1)(t-1)(t-2)(s+1)(2s+1)}{2}$ koppels, dus moet

$$s^2N_0 + s^2N_1 + \sum_{i=1}^{s}(i+1)iN_{4.i} = \frac{s^2(s+1)^2(t-1)(t-2)(2s+1)}{2}. \tag{8.6}$$

Vervangen we hierin (8.1), dan krijgen we

$$s^2N_1 + \sum_{i=1}^{s}(i+1)iN_{4.i} = s^3(s+1)^2(t-1)(t-2). \tag{8.7}$$

We tellen de koppels $(x, \{l, l'\})$ met $x \in \Gamma_2(Q)$, $l$ en $l'$ rechten door $x$ met de voorwaarde dat slechts één van de rechten $l$ en $l'$ een punt bevat van $\Gamma_1(Q)$. Enerzijds hebben we $s(s+1)N_2 + \sum_{i=0}^{s-1} 2(i+1)(s-i)N_{4.i}$ zulke koppels. Anderzijds vinden we opnieuw $\frac{s^2(s+1)(t-1)(t-2)}{2}$ punten in $\Gamma_2(Q)$ die elk op $2(s+1)$ rechten liggen die elk een punt bevatten van $\Gamma_1(Q)$ en dus op $t-2s-1$ andere rechten die geen punten kunnen bevatten van $\Gamma_1(Q)$. We vinden zo

$$s(s+1)N_2 + \sum_{i=0}^{s-1} 2(i+1)(s-i)N_{4.i} = s^2(s+1)^2(t-1)(t-2)(t-2s-1). \tag{8.8}$$

We tellen nu ook $(x, \{l, l'\})$ met $x \in \Gamma_2(Q)$, $l$ en $l'$ rechten door $x$ die beide in $\Gamma_2(Q)$ moeten liggen. We vinden enerzijds $(s+1)^2N_3 + \sum_{i=0}^{s-1}(s-i)^2N_{4.i}$ zulke koppels. Anderzijds vinden we $\frac{s^2(s+1)(t-1)(t-2)}{2}$ punten in $\Gamma_2(Q)$ die elk op $2(s+1)$ rechten liggen die een punt bevatten van $\Gamma_1(Q)$. Door zo'n punt van $\Gamma_2(Q)$ gaan dus $t-2s-1$ rechten die bevat zijn in $\Gamma_2(Q)$. We vinden

$$(s+1)^2N_3 + \sum_{i=0}^{s-1}(s-i)^2N_{4.i} = \frac{s^2(s+1)(t-1)(t-2)(t-2s-1)(t-2s-2)}{4}. \tag{8.9}$$

Door (8.5) te vervangen in (8.8) krijgen we

$$-2s^2N_1 + \sum_{i=0}^{s-1} 2(i+1)(s-i)N_{4.i} = s^2(s+1)^2(t-1)(t-2)(t-2s-3).$$

Combineren we dit met (8.7), dan krijgen we

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{s-1}(i+1)(s-i)N_{4.i} + \sum_{i=1}^{s} i(i+1)N_{4.i} &= \frac{s^2(s+1)^2(t-1)(t-2)(t-3)}{2}, \\
\sum_{i=0}^{s}(i+1)(s-i)N_{4.i} + \sum_{i=0}^{s} i(i+1)N_{4.i} &= \frac{s^2(s+1)^2(t-1)(t-2)(t-3)}{2}, \\
\sum_{i=0}^{s}(i+1)N_{4.i} &= \frac{s(s+1)^2(t-1)(t-2)(t-3)}{2}.
\end{aligned} \tag{8.10}$$

Als we nu $\gamma \in \mathbb{Q}$ definiëren door te stellen dat $N_1 = s(s+1)^2\gamma$, dan krijgen we uit (8.5) dat

$$N_2 = 2s(s+1)((t-1)(t-2) - s\gamma).$$

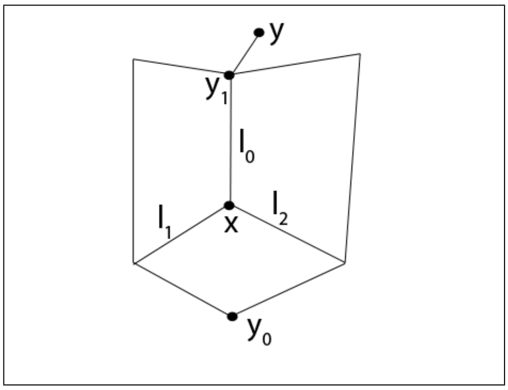
Uit (8.2) vinden we $N_5 = s(t-1-\gamma)$. Omdat zowel $N_1$ als $N_5$ positief zijn, vinden we hieruit dat $0 \le \gamma \le t-1$.

## 2 Kubussen

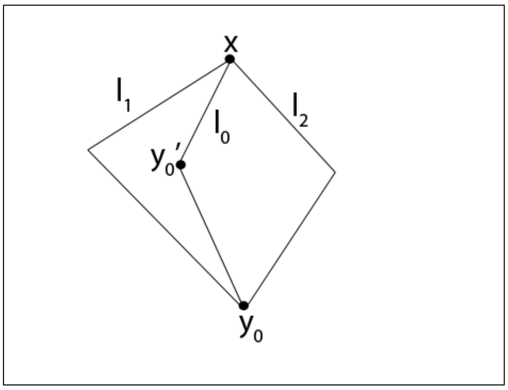
**Definitie 8.1.** *Neem drie rechten $l_0$, $l_1$ en $l_2$ door een punt $x$ en stel $Q_0$ het quad opgespannen door $l_1$ en $l_2$, $Q_1$ het quad opgespannen door $l_0$ en $l_2$ en $Q_2$ het quad opgespannen door $l_0$ en $l_1$. Stel dat er punten $y$ zijn met buren in zowel $Q_0$, $Q_1$ als $Q_2$, maar die geen buur van $x$ zijn. De verzameling van de punten $y$ en de punten in de quads $Q_0$, $Q_1$ en $Q_2$ noemen we een kubus.*

**Lemma 8.2.** *We nemen een kubus geconstrueerd zoals in de Definitie 8.1. De unieke buur van $y$ in het quad $Q_i$, $i \in \{0, 1, 2\}$ noemen we $y_i$. De punten $y_i$ liggen dan op afstand 2 van $x$.*

**Bewijs.** De punten $y_i$, $i \in \{0, 1, 2\}$ liggen in een quad met $x$. Als $y_1$ een buur van $x$ zou zijn, dan zou het op één van de rechten $l_0$ of $l_2$ moeten liggen. Het zou dus in twee van de drie quads $Q_0$, $Q_1$ en $Q_2$ liggen. Stel dat $y_1$ op de rechte $l_0$ ligt en dus in de quads $Q_1$ en $Q_2$ ligt (zie Figuur 8.2).




Figuur 8.2: Verduidelijking bij Lemma 8.2

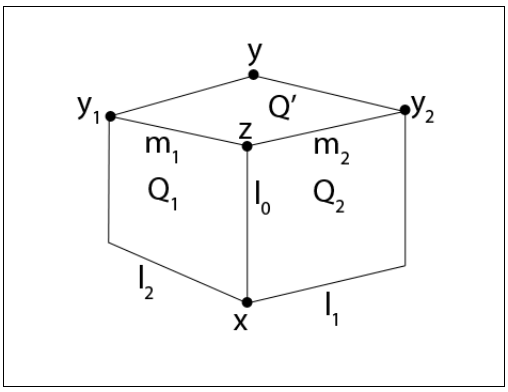



Figuur 8.3: Verduidelijking bij Lemma 8.2

Omdat een punt op afstand 1 van een quad maar één buur in dat quad kan hebben en $y$ al een buur heeft in $Q_1$ en $Q_2$, kan $y_0$ niet op $l_1 \subset Q_2$ of $l_2 \subset Q_1$ liggen. Het punt $y_0$ kan dus geen buur zijn van $x$. Nu ligt $y_0$ op afstand 2 van twee verschillende punten van $l_0$, namelijk van $x$ en van $y_1 = y_2$ via het punt $y$. Dit kan enkel als $y_0$ en buur $y_0'$ heeft op $l_0$. Op deze manier vinden we drie verschillende paden van $x$ naar $y_0$, namelijk één via $l_0$ en het punt $y_0'$ en twee in het quad $Q_0$ (zie Figuur 8.3). Doordat $t_2 = 1$ is, vinden we hier een strijdigheid. Elk punt $y_i$, $0 \leq i \leq 2$ ligt dus op afstand 2 van $x$. □

**Lemma 8.3.** *Een kubus $C$ zoals geconstrueerd in Definitie 8.1 bevat $(s + 1)^3$ punten.*

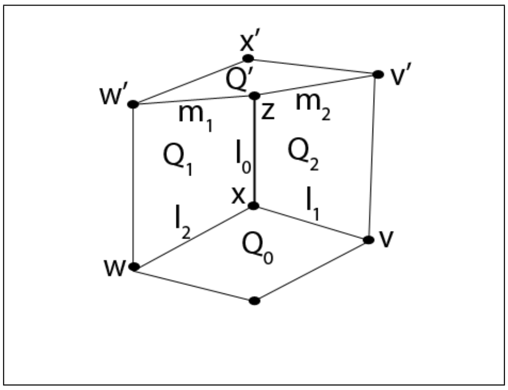
**Bewijs.** Doordat $y_1$ op afstand 2 van $x$ ligt en in $Q_1$ ligt, heeft $y_1$ een buur op $l_0$. We noemen $m_1$ de rechte door $y_1$ die een punt van $l_0$ bevat. Analoog noemen we $m_2$ de rechte door $y_2$ die een punt van $l_0$ bevat. Omdat $l_0$ een uniek punt bevat het dichtst bij $y$, moeten $m_1$ en $m_2$ hetzelfde punt $z$ van $l_0$ bevatten. Het quad opgespannen door $m_1$ en $m_2$ noemen we $Q'$ (zie Figuur 8.4).




Figuur 8.4: Verduidelijking bij Lemma 8.3

Dit quad bevat het punt $y$ aangezien $y$ een buur heeft op elk van de rechten $m_1$ en $m_2$. Hierdoor vinden we vier punten $y, y_1, y_2$ en $z$ in $Q'$ die in $\Gamma_1(Q_0)$ liggen. Als er twee collineaire punten van $Q'$ in $\Gamma_1(Q_0) \bigcup Q_0$ liggen, dan liggen de andere punten op de rechte door deze twee collineaire punten hier ook in. Doordat het quad $Q'$ een $(s+1) \times (s+1)$-rooster is, volgt nu dat $Q'$ volledig in $\Gamma_1(Q_0)$ ligt.

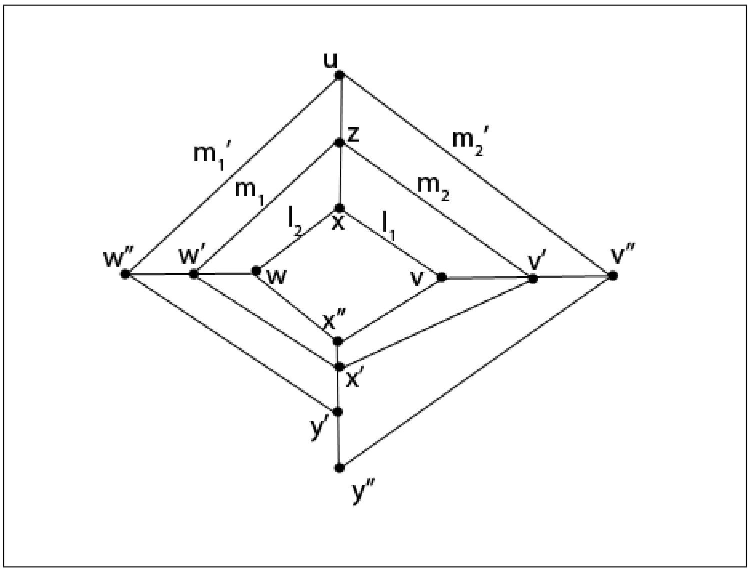
We nemen nu een punt $u \in l_0$, een punt $v \in l_1$ en een punt $w \in l_2$ en we willen bewijzen dat er een uniek punt $x' \in C$ is zodat $u$, $v$ en $w$ de punten zijn op $l_0$, $l_1$ en $l_2$ het dichtst bij $x'$. Als $u = z$, dan vinden we een buur $v'$ van $v$ op $m_2$ (want $l_1$ en $m_2$ zijn parallel in $Q_2$). Analoog vinden we een buur $w'$ van $w$ op $m_1$ (zie Figuur 8.5).




Figuur 8.5: Verduidelijking bij Lemma 8.3

In $Q'$ vinden we naast $u$ nog een gemeenschappelijke buur $x'$ van $v'$ en $w'$. Omdat $Q' \subset \Gamma_1(Q_0)$, heeft dit punt $x'$ een buur $x''$ in $Q_0$. Het punt $x'$ is dus een punt van $C$.

Als $u \neq z$, dan kunnen we in $Q_1$ een rechte $m_1'$ vinden door $u$ en parallel aan $l_2$ en $m_1$. Het punt $w$ heeft dan een een buur $w''$ op $m_1'$ waardoor $w'' \in Q_1$. In $Q_2$ vinden we een rechte $m_2'$ door $u$ en parallel aan $l_1$ en $m_2$. Het punt $v$ heeft dan een buur $v''$ op $m_2'$ waardoor $v'' \in Q_2$. De rechten $m_1'$ en $m_2'$ zijn uiteraard twee verschillende rechten, aangezien $m_1'$ niet in $Q_2$ ligt. In het quad opgespannen door $wx''$ en $ww'$ is $ww'$ parallel aan $x'x''$. We vinden dus een buur $y'$ van $w''$ op $x'x''$. Analoog vinden we een buur $y''$ van $v''$ op $x'x''$. Als $y' \neq y''$, dan krijgen we een vijfhoek $uw''y'y''v''$ (zie Figuur 8.6).




Figuur 8.6: Verduidelijking bij Lemma 8.3

Het punt $u$ moet dus collineair zijn met een punt op $x'x''$. Hieruit volgt dat zowel $uv''$ als $uw'$ parallel zijn aan $x'x''$. Doordat $t_2 = 1$, is er maar één rechte door $u$ parallel aan $x'x''$, dus moeten $u$, $v''$ en $w''$ op dezelfde rechte liggen. Dit kan enkel als $m_1'$ en $m_2'$ éénzelfde rechte zijn, wat uiteraard een strijdigheid is. Het punt $y' = y''$ is dus een gemeenschappelijke buur van $v''$ en $w''$. Door $t_2 = 1$ is dit ook de enige gemeenschappelijke buur naast $u$. Het punt $y'$ ligt op de rechte $x'x''$, en heeft bijgevolg een buur in $Q_0$. Het punt $y'$ is dus bevat in de kubus $C$.

We vinden voor elk punt $x'$ van $C$ ook een drietal punten $(u, v, w)$ met $u \in l_0$, $v \in l_1$, $w \in l_2$ zodat dit net de punten op hun rechte zijn het dichtst bij $x'$. Door deze bijectie vinden we dat $|C| := (s+1)^3$. □

**Lemma 8.4.** *Elk punt van de kubus $C$ ligt op drie rechten.*

**Bewijs.** Als we terugkijken naar het bewijs van het vorige lemma, dan kan een punt dat niet in een quad door $x$ ligt de rol spelen van $y$, waardoor het op de drie rechten $yy_0$, $yy_1$ en $yy_2$ ligt. Als het wel in een quad door $x$ ligt, maar geen buur is van $x$, dan speelt het de rol van $y_1$, waardoor het op de rechten $yy_1$, $m_1$ en de rechte in $Q_1$ door $y_1$ verschillend van $m_1$ ligt. Deze laatste rechte bestaat door $t_2 = 1$. Als het een buur is van $x$, dan speelt het de rol van $z$ en ligt het op de rechten $l_0$, $m_1$ en $m_2$. Ten slotte kan het punt ook gelijk zijn aan $x$, waardoor het op de rechten $l_0$, $l_1$ en $l_2$ ligt. □

**Lemma 8.5.** *Een rechte van $C$ ligt in twee quads van $C$*

**Bewijs.** Als deze rechte $x$ bevat, dan speelt ze de rol van $l_0$ en ligt ze in de quads $Q_1$ en $Q_2$. Bevat de rechte een buur van $x$, dan speelt ze de rol van $m_1$ en ligt ze in de quads $Q_1$ en $Q'$. Bevat de rechte geen punten op afstand 1 van $x$, dan speelt de rechte de rol van $yy_1$. Ze ligt dan in de quads $Q'$ en het quad voortgebracht door $yy_1$ en de rechte in $Q_1$ parallel aan $l_0$. □

**Lemma 8.6.** *Een quad gevormd door twee snijdende rechten in de kubus of twee punten op afstand 2 in de kubus ligt steeds bevat in de kubus.*

**Bewijs.** Als de snijdende rechtenpaar de rol speelt van $(l_0, l_1)$ of $(l_0, m_2)$, dan krijgen we het quad $Q_2$. Als ze de rol speelt van $(m_1, m_2)$, $(m_1, yy_1)$ of $(yy_1, yy_2)$, dan vinden we het quad $Q'$. Omdat een rechte altijd één van de quads door $x$ snijdt, hebben we hier alle mogelijkheden behandeld.

Nemen we twee punten $a$ en $b$ op afstand 2 in de kubus, dan hebben deze een gemeenschappelijke buur $c$. Het quad voortgebracht door $a$ en $b$ komt dan overeen met het quad voortgebracht door de snijdende rechten $ua$ en $ub$. Uit het eerste deel van dit bewijs weten we dus dat dit quad in $C$ ligt. □

We nemen nu een vast quad $Q$ en een quad $Q'$ van type (5) ten opzichte van $Q$, dus $Q' \subset \Gamma_1(Q)$. We zien dat $Q$ en $Q'$ een kubus $C$ bepalen, en dat er $s$ quads van type (5) ten opzichte van $Q$ in $C$ liggen. We kunnen de quads van type (5) ten opzichte van $Q$ dus groeperen per kubus $C$ (dus in groepjes van $s$), en we vinden zo dat $s|N_5$. Uit (8.2) volgt dat $s(s+1)^2|N_1$. Hieruit volgt nu dat $\gamma$ een geheel getal is.

**Definitie 8.7.** *Voor een vast quad $Q$, twee buren $x$ en $y$ in $Q$ en een rechte $l$ met $Q \bigcap l = \{x\}$ definiëren we $\tau_{xy}(l)$ als de rechte van het quad opgespannen door $l$ en $xy$ met de eigenschap $\tau_{xy}(l) \bigcap Q = \{y\}$.*

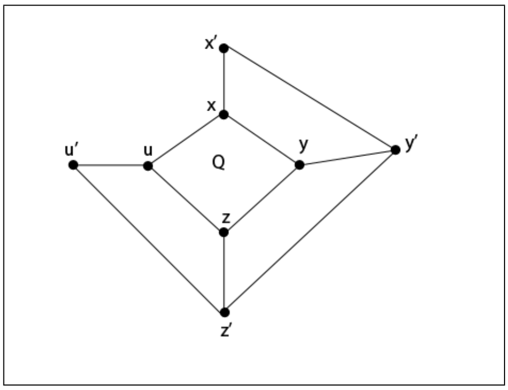
Omdat $\tau_{xy}(l)$ en $l$ in hetzelfde quad liggen, maar geen punt gemeen hebben, zijn ze parallel.

**Lemma 8.8.** *We nemen een quad $Q$ en een rechte $l$ die geen kubus opspannen. Voor vier punten $x$, $y$, $z$ en $u$ die een vierkant vormen (dus $x \sim y \sim z \sim u \sim x$ en $x \neq z$) geldt dan dat $(\tau_{ux} \circ \tau_{zu} \circ \tau_{yz} \circ \tau_{xy})(l) \neq l$.*

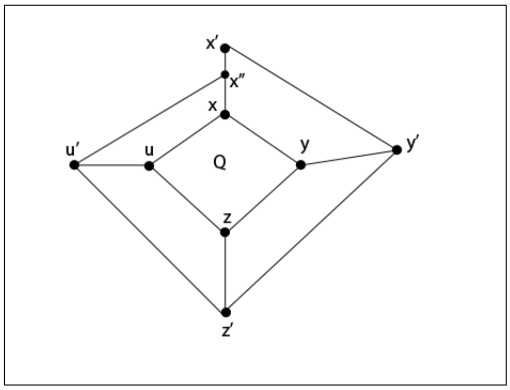
**Bewijs.** We nemen een punt $x'$ op $l$ verschillend van $x$, de buur $y'$ van $x'$ op $\tau_{xy}(l)$, de buur $z'$ van $y'$ op $\tau_{yz}(\tau_{xy}(l))$, de gemeenschappelijke buur $u'$ van $u$ en $z'$ verschillend van $z$ en de gemeenschappelijke buur $x''$ van $u'$ en $x$ verschillend van $u$ (zie Figuur 8.7).

Als $x$, $x'$ en $x''$ collineair zijn en alledrie op $l$ liggen, en $x' \neq x''$, dan vinden we een vijfhoek $x'y'z'u'x''$ (zie Figuur 8.8). Dit kan enkel als $z'$ collineair is met een punt op $l$, stel met het punt $x^*$, maar dan vinden we de vijfhoek $xyzz'x^*$, dus moet $y$ collineair zijn met een punt op de rechte $z'x^*$ (zie Figuur 8.9).

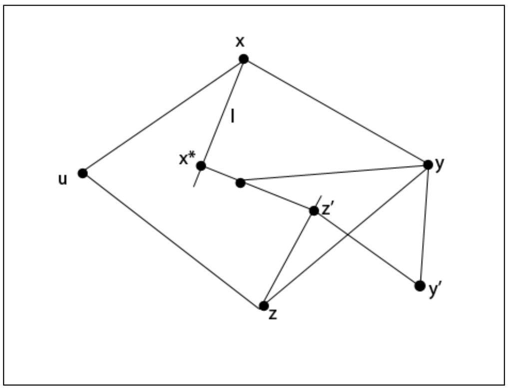
We vinden dan drie gemeenschappelijke buren van $y$ en $z'$, strijdig met $t_2 = 1$. Als nu $x' = x''$ dan vervullen $l$, $xu$ en $xy$ de rol van $l_0$, $l_1$ en $l_2$ en spannen $Q$ en $l$ dus een kubus op. De enige overige mogelijkheid is dus dat $x$, $x'$ en $x''$ niet collineair zijn, wat onze bewering bevestigt. □




Figuur 8.7: Verduidelijking bij Lemma 8.8




Figuur 8.8: Verduidelijking bij Lemma 8.8




Figuur 8.9: Verduidelijking bij Lemma 8.8

**Lemma 8.9.** *Er geldt dat $\gamma = 0$ of dat $\gamma \geq s+1$.*

**Bewijs.** We veronderstellen hier dat er een rechte $l$ bestaat die samen met een vast quad $Q$ geen kubus opspant, dus dat $\gamma \neq 0$. Inderdaad, als $\gamma = 0$, dan is $N_1 = 0$. Dit betekent dat elk quad $Q'$ dat twee snijdende rechten van $\Gamma_1(Q)$ bevat van type (5) moet zijn. Dit kan enkel als elke rechte met punten van $\Gamma_1(Q)$ samen met $Q$ een kubus opspant.

We nemen nu $x$ en $y$ vast in $Q$, dan zijn er in het vorige lemma $s$ mogelijkheden voor het puntenpaar $(z, u)$, namelijk één per rechte in $Q$ parallel aan $xy$. Voor elke mogelijkheid vinden we een andere rechte $(\tau_{ux} \circ \tau_{zu} \circ \tau_{yz} \circ \tau_{xy})(l)$, die allen verschillend zijn. Indien we immers voor twee paren $(u_1, z_1)$ en $(u_2, z_2)$ dezelfde rechte $l'$ zouden bekomen, dan moeten volgens de redenering uit het vorige lemma de bekomen punten $x'$ in beide gevallen hetzelfde zijn. We krijgen dus een kubus $C$. Omdat het quad voortgebracht door $l'$ en $xu$ in $C$ ligt, moet $uu'_1$ ook in $C$ liggen. Op deze manier kunnen we terugkeren op onze stappen en vinden we dat $l$ ook in $C$ ligt, een strijdigheid.

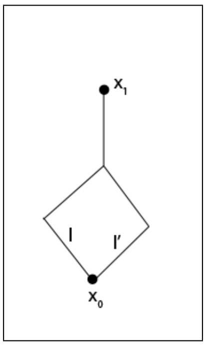
We vinden zo $s+1$ rechten door $x$ die geen kubus bepalen samen met $Q$. Nu is $\gamma$ exact het aantal rechten door een vast punt van $x$ die niet in een kubus liggen dat $Q_0$ bevat. Om dit in te zien bekijken we de telling die we uitvoerden in (8.2). We telden daar koppels $(y, \{l, l'\})$ met $y \in \Gamma_1(Q)$ en $l$ en $l'$ twee rechten door $y$ in $\Gamma_1(Q)$. De gelijkheid (8.2) wordt hier

$$s(s+1)^2\gamma + (s+1)^2 N_5 = s(s+1)^2(t-1).$$

In deze gelijkheid staat de term $s(s+1)^2\gamma$ voor alle punten $y$ die een buur $x \in Q$ hebben en waarbij de rechte $xy$ samen met het quad $Q$ geen kubus opspant. Per punt $x$ van $Q$ zijn er dus $s\gamma$ zulke punten. Als er een rechte door $x$ één van deze punten bevat, dan bevat het sowieso $s$ van deze punten. Er zijn dus $\gamma$ rechten door $x$ die samen met $Q$ geen kubus opspannen. Hier vinden we al $s+1$ zulke rechten, dus moet $\gamma \geq s+1$. $\square$

**Lemma 8.10.** *Als $\gamma = 0$ voor alle quads $Q$, dan is 3 een deler van $t + 1$.*

**Bewijs.** We nemen twee punten $x_0$ en $x_1$ met $d(x_0, x_1) = 3$. We definiëren een graaf met als punten de rechten door $x_0$ en waarvan de punten overeenkomend met de rechten $l$ en $l'$ adjacent zijn als $x_1$ op afstand 1 ligt van het quad opgespannen door $l$ en $l'$ (zie Figuur 8.10).




Figuur 8.10: Verduidelijking bij Lemma 8.10

Als we een rechte $l$ door $x_0$ nemen, dan bevat $l$ een uniek punt $z$ op afstand 2 van $x_1$. Door $z$ gaan $t_2 + 1$ rechten die buur van $x_1$ bevatten, en met elk van deze rechten spant $l$ een quad op dat een rechte door $x_0$ bevat. Zo vinden we $t_2 + 1 = 2$ buren van het punt in de graaf overeenkomstig met $l$. Dit zijn ook de enige buren van dit punt, want stel dat er nog een buur is corresponderend met de rechte $l''$, dan vinden we in het quad opgespannen door $l$ en $l''$ een buur van $x_1$, dus ook een rechte die deze buur van $x_1$ bevat en die ook een punt van $l$ bevat. Deze rechte moet wel één van de $t_2 + 1$ rechten zijn die we al gevonden hadden. In de graaf is dus $k = 2$, dus de graaf is een unie van veelhoeken. Als we drie opeenvolgende punten hebben in één van deze veelhoeken overeenkomstig met de rechten $l$, $l'$ en $l''$ en deze rechten spannen een kubus op, dan spannen de rechten $l$ en $l''$ ook een quad op en zijn de punten overeenkomstig met deze rechten adjacent. We vinden bijgevolg een driehoek in de graaf. Als $\gamma = 0$ voor alle quads, dan spannen alle drietallen van opeenvolgende rechten een kubus op. De graaf is dus een unie van driehoeken. Het aantal punten van de graaf is dus deelbaar door 3. Dit betekent dat het aantal rechten door $x$ (zo zijn er $t + 1$) ook deelbaar is door 3. □

# 3 De schierzeshoek met parameters $(s, t_2, t) = (3, 1, 9)$

We bekijken nu een reguliere schierzeshoek met parameters $(s, t_2, t) = (3, 1, 9)$. Met deze parameters krijgen we

$$N_0 = 448, \qquad N_1 = 48\gamma, \qquad N_2 = 24(56 - 3\gamma), \qquad N_5 = 3(8 - \gamma).$$

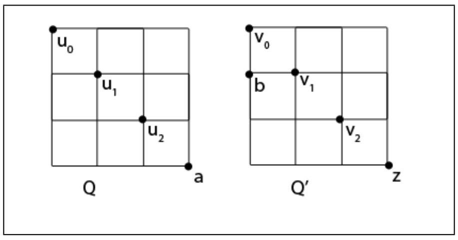
Hiermee worden vergelijkingen (8.7), (8.9) en (8.10)

$$2N_{4.1} + 6N_{4.2} + 12N_{4.3} = 24192 - 432\gamma, \tag{8.11}$$
$$16N_3 + 9N_{4.0} + 4N_{4.1} + N_{4.2} = 1008, \tag{8.12}$$
$$N_{4.0} + 2N_{4.1} + 3N_{4.2} + 4N_{4.3} = 8064. \tag{8.13}$$

**Lemma 8.11.** *Voor een vast quad $Q$ zijn er geen quads $Q'$ van type (4.2) ten opzichte van $Q$, dus $N_{4.2} = 0$.*

**Bewijs.** We nemen twee quads $Q$ en $Q'$ en we nemen aan dat $Q'$ van type (4.2) is ten opzichte van $Q$. We hebben dan drie punten $v_0$, $v_1$ en $v_2$ in $Q'$ die een deel vormen van een ovoïde van $Q'$. De buur van $v_i$, $i \in \{0, 1, 2\}$ in $Q$ noemen we $u_i$. De punten $u_i$ zijn twee aan twee niet-collineair (anders vinden we vijfhoeken), en maken dus deel uit van een ovoïde van $Q$. Een ovoïde in $Q$ moet $s + 1 = 4$ punten bevatten, en dus kunnen we nog een punt $a$ vinden dat met geen enkel van de punten $u_i$, $i \in \{0, 1, 2\}$ collineair is (zie Figuur 8.11).

Het punt $a$ ligt dan op afstand 2 van het quad $Q'$, en moet dus ovoïdaal zijn ten opzichte van $Q'$. De ovoïde gevormd door de punten van $Q'$ op afstand 2 van $a$ noemen we $O$. De punten $v_i$, $i \in \{0, 1, 2\}$




Figuur 8.11: Verduidelijking bij Lemma 8.11

liggen op afstand 3 van $a$, en liggen bijgevolg niet in de ovoïde $O$. Als we de punten $v_i$, $i \in \{0,1,2\}$ in het rooster $Q'$ bekijken, dan zien we dat één punt $z$ van $Q'$ met geen van deze punten collineair is (namelijk het punt dat samen met de punten $v_i$, $i \in \{0,1,2\}$ een ovoïde vormt), zes punten van $Q'$ met slechts één van deze punten collineair zijn (namelijk de punten verschillend van $z$ op de rechten door $z$ in $Q'$) en zes punten met twee van deze punten collineair zijn (namelijk de overige punten verschillend van $v_i$, $i \in \{0,1,2\}$). Van de punten uit $O$ kunnen er maximum twee met één punt of minder van de punten $v_i$, $i \in \{0,1,2\}$ collineair zijn. Deze punten moeten immers beide op een rechte door $z$ liggen, en aangezien er maar één punt van $O$ op elke rechte kan liggen, kunnen er hoogstens twee zulke punten zijn. We kunnen dus een punt $b \in Q'$ kiezen met $d(a,b) = 2$ en we mogen aannemen dat $b$ een buur is van zowel $v_0$ als $v_1$. Omdat $b$ op afstand 2 van $Q$ ligt, bepalen de punten van $Q$ die het dichtst bij $b$ liggen een ovoïde in $Q$. De punten $a$, $u_0$ en $u_1$ liggen op afstand 2 van $b$ en liggen bijgevolg in deze ovoïde, dus moet het laatste punt van deze ovoïde gelijk zijn aan $u_2$. Het punt $u_2$ ligt echter op afstand 3 van $b$, dus vinden we hier een strijdigheid. $\square$

Als we bovenstaand resultaat in (8.11), (8.12) en (8.13) invullen, krijgen we

$$\begin{aligned} 2N_{4.1} + 12N_{4.3} &= 24192 - 432\gamma, \\ 16N_3 + 9N_{4.0} + 4N_{4.1} &= 1008, \\ N_{4.0} + 2N_{4.1} + 4N_{4.3} &= 8064. \end{aligned}$$

Uit de eerste en derde vergelijking vinden we

$$3N_{4.0} + 4N_{4.1} = 432\gamma.$$

In de tweede vergelijking krijgen we dan

$$16N_3 + 6N_0 + 432\gamma = 1008,$$

dus moet $432\gamma \leq 1008$. Dit betekent dat $\gamma \leq 2$. In Lemma 8.9 vonden we dat ofwel $\gamma = 0$, ofwel $\gamma \geq s + 1 = 4$. Hier moet dus $\gamma = 0$. Dankzij Lemma 8.10 vinden we dan dat 3 een deler moet zijn van $t + 1 = 10$. We vinden een strijdigheid en kunnen dus besluiten dat er geen reguliere schierzeshoeken bestaan met parameters $(s, t_2, t) = (3, 1, 9)$.

# Bijlage A

# English summary

The main goal of this master's dissertation is proving certain conditions on the parameters of specific types of near polygons. For near octagons we wish to proof the following result:

**Theorem A.1.** *A regular near octagon with parameters $(s, t_2, t_3, t_4)$ always satisfies one of the following conditions:*

1. $s = 1$,
2. $t_2 = 0$,
3. $t_2 = 1$ *or*
4. $t_3 = t_2(t_2 + 1)$ *and* $t_4 = t_3(t_3 + 1)$*, so* $X$ *is a classical near octagon.*

In this theorem, $s + 1$ denotes the number of points on a line. For a point $x$ and a point $y$ at distance $i$ form $x$, there are $t_i + 1$ neighbours of $y$ at distance $i - 1$ of $x$. In order to proof this result, we need the Krein conditions, which are proven in Chapter 1 and are given in the following theorem.

**Theorem A.2.** *For all* $i, j, k \in 0, ..., d$ *the following holds:*

$$\sum_{l=0}^{d} k_l Q_{li} Q_{lj} Q_{lk} \geq 0.$$

In this theorem, $Q_{ij}$ denotes the $(i, j)$th entry in the matrix $Q$ which transforms the basis $\{A_0, A_1, ..., A_d\}$ in the basis of minimal idempotents $\{E_0, E_1, ..., E_d\}$. In Chapter 2 these conditions are expressed in the parameters of distance-regular graphs of which the collinearity graphs of near polygons are a specific case. In Chapter 4 we use these conditions to find restrictions on the parameters of near polygons. We also use geometric arguments to find certain equations, which we will use in the proof of theorem A.1.

In Chapter 5, theorem A.1 is proven by constructing a design on the quads and hexes which contain a fixed line of the near octagon. In the case $R = K$ with $R$ the replication number of this design and $K$ the size of a block of this design, we proof that the design corresponds with a finite, regular, locally projective space. In Chapter 3 we proof the following result, which we use in the case $R = K$:

**Theorem A.3.** *A finite, regular, locally projective space with diameter* $d \geq 3$ *is always a projective space, an affina space or a Lobachevsky space with type* $k^2 - k + 1$ *of* $k^3 + 1$.

Here $k$ denotes the number of points on a line. Thereafter, we proof the following result concerning generalized polygons in Chapter 6, using the Krein conditions and the fact that the multiplicity of an eigenvalue of the adjacency matrix of a generalized polygon is an integer:

**Theorem A.4.** *Unless* $s = t = 1$*, a generalized* $n$*-gon of order* $(s, t)$ *always satisfies the condition* $n \in \{3, 4, 6, 8, 12\}$*. If* $s > 1$ *and* $t > 1$*, the following holds:*

1. $n \neq 12$,
2. *if* $n = 4$ *then* $s \leq t^2$ *and* $t \leq s^2$,

3. *if* $n = 6$ *then* $st$ *is a square and* $s \leq t^3$ *and* $t \leq s^3$*,*

4. *if* $n = 8$ *then* $2st$ *is a square and* $s \leq t^2$ *and* $t \leq s^2$*.*

Next, we proof the non existence of near octagons with parameters $(s, t, t_2, t_3) = (2, 24, 0, 8)$ in chapter 7 using geometric arguments. At last, we proof the nonexistence of near hexagons with parameters $(s, t_2, t) = (3, 1, 9)$ in chapter 8.

# Bibliografie


[1] A. Neumaier, *Krein conditions and near polygons*, J. Combin. Theory A. 54 (1990), 201-209

[2] C. Godsil, *Algebraic combinatorics*, Chapman and Hall Mathematics (1993)

[3] J. Doyen, X. Hubaut, *Finite regular locally projective spaces*, Math. Z. 119 (1971), 83-88

[4] A.E. Brouwer, H.A. Wilbrink, *The structure of near polygons with quads*, Geom. Dedicata 14 (1983), 145-176

[5] B. De Bruyn, *The completion of the classification of the regular near octagons with thick quads*, J. Algebr. Comb. 24 (2006), 23-29

[6] B. De Bruyn, *The nonexistence of regular near octagons with parameters* $(s, t, t_2, t_3) = (2, 24, 0, 8)$, Electron. J. Combin. 17 (2010), R149

[7] A.E. Brouwer, *The nonexistence of a regular near hexagon on 1408 points*, MC Report ZW 163/81 (1981), 8 pp.

[8] A.E. Brouwer, A.M. Cohen, A. Neumaier *Distance-regular Graphs*, Ergebnisse der Mathematik 3.18, Springer, Heidelberg (1989)

[9] B. De Bruyn, *Near Polygons*, Frontiers in Mathematics, Birkhauser (2006)

[10] A.E. Brouwer, *The uniqueness of the near hexagon on 759 points*, MC Report ZW 154 (1981)

[11] T. Beth, H. Lenz, *Design theory, Volume 1*, Encyclopedia of Mathematics and its Applications 69, Cambridge University Press (1999), p.78