Universiteit Gent

Faculteit Wetenschappen

Vakgroep Toegepaste Wiskunde en Informatica

Voorzitter: prof. dr. G. VANDEN BERGHE

Faculteit Ingenieurswetenschappen

Vakgroep Informatietechnologie

Voorzitter: prof. dr. ir. P. LAGASSE

Vaaglogica voor praktisch gebruik – een calculationele aanpak

door

Jeroen JANSSEN

Promotor: prof. dr. M. DE COCK

Co-Promotor: prof. dr. ir. R. BOUTE

Scriptie ingediend tot het behalen van de academische graad van licentiaat in de informatica

Academiejaar 2006–2007

Voorwoord

Wetenschap bedrijft men niet alleen, maar is een werk van mensen dat reeds in de oudheid startte. Elke wetenschapper, welke definitie men hiervoor ook moge hanteren, is zo mede verantwoordelijk geweest voor het tot stand komen van de wetenschappelijke kennis heden ten dage. Ook dit afstudeerwerk, dat een stukje wetenschappelijke vooruitgang ambieert te zijn, is niet tot stand gekomen door één persoon, maar is het werk geweest van verschillende personen die elk op hun manier een stukje van de puzzel mee hebben helpen invullen. Personen die ik hier dan ook uitdrukkelijk wens te bedanken voor hun tijd en inzet om tesamen dit werk tot een goed einde te helpen brengen.

In de eerste plaats wens ik mijn twee promotoren te bedanken, Raymond Boute en Martine De Cock. Beiden hebben steevast waardevolle kritiek gegeven en mij op verscheidene plaatsen terecht gewezen, geholpen en aangevuld. Voor hun bereidheid na het vertrek van mijn begeleider het extra werk van een afstudeerbegeleiding op zich te willen nemen, kan ik niet anders dan grote dankbaarheid uiten. Ook David Matthys wens ik te bedanken voor zijn waardevolle opmerkingen op eerste versies van dit werk. Mijn zus Helena verdient hier ook zeker een vermelding voor het nalezen van dit eindwerk op taalfouten. De taalkundige opmerkingen werden ten zeerste geapprecieerd. Ten slotte moet ik ook mijn begeleider uit het eerste semester, Hannes Verlinde, bedanken voor het delen van ideeën en om dit afstudeerwerk op de sporen te helpen zetten.

Jeroen Janssen, juni 2007

Toelating tot bruikleen

Vaaglogica voor praktisch gebruik – een calculationele aanpak

door

Jeroen JANSSEN

Scriptie ingediend tot het behalen van de academische graad van
licentiaat in de informatica

Academiejaar 2006–2007

Promotor: prof. dr. M. DE COCK
Co-Promotor: prof. dr. ir. R. BOUTE

Faculteit Wetenschappen
Faculteit Ingenieurswetenschappen
Universiteit Gent

Vakgroep Toegepaste Wiskunde en Informatica
Voorzitter: prof. dr. G. VANDEN BERGHE

Vakgroep Informatietechnologie
Voorzitter: prof. dr. ir. P. LAGASSE

Samenvatting

Traditioneel wordt logica maar al te vaak als een geïsoleerd studiedomein bekeken. Ook de formele vaaglogica is jammer genoeg in ditzelfde bedje ziek. In de laatste decennia werden echter calculationele stijlen voor de klassieke formele logica ontwikkeld die een praktischer gebruik van logica toelaten. In dit afstudeerwerk onderzoeken we hoe we voor de formele vaaglogica een dergelijke calculationele stijl kunnen opbouwen. Het zal blijken dat deze stijl voor de vaaglogica in veel gevallen elegante bewijsvoeringen toelaat en tevens een sterke analogie vertoont met de calculationele klassieke logica, wat een onmiskenbaar voordeel oplevert tegenover de gebruikelijke manier van werken aan de hand van ordetheorie.

Trefwoorden

Calculationele logica, vaaglogica, Funmath, functionele stijl

Fuzzy logic for practical use – A calculational approach

Jeroen Janssen

Supervisors: Martine De Cock, Raymond Boute

Abstract—**Over the years, logicians have studied logic fairly well. Logic has remained a separate field of study, however, rather than a practical tool for reasoning in everyday work. Over the past few decades, forms of calculational logic have been developed, which allow us to use logic as the "glue" that connects reasoning in many different domains, giving rise to its use in day-to-day engineering and computer science applications. In this dissertation, we explore how to develop a calculational style for fuzzy logic and whether this improves reasoning in domains that rely heavily on this logic just as much as calculational logic did for domains relying on formal logic.**

Keywords—**Calculational logic, fuzzy logic, Funmath, functional style**

I. Calculational reasoning

OVER the past few centuries, logic has been under extensive study. It has, however, only been studied as a mathematical object and not as a practical tool for reasoning. During the last decades, the need for a logic, useable in real-life applications grew, especially in computing science research, which led to the creation of various "calculational logic"-styles [1], [2], [3]. In its purest form, calculational reasoning is nothing more than using a "chain" of transitive relations, mainly implications or equivalences, that lead from one term in the theorem we like to prove to the other. Consider for example that we wish to prove the "Shunting" theorem, which states that $(x \Rightarrow y \Rightarrow z) \Rightarrow y \Rightarrow x \Rightarrow z$. A calculational proof for this theorem is:

$$\begin{array}{lll} x \Rightarrow y \Rightarrow z & \Rightarrow \langle \mathrm{D}{\Rightarrow} \rangle & (x \Rightarrow y) \Rightarrow x \Rightarrow z \\ & \Rightarrow \langle \mathrm{M}{\Rightarrow} \rangle & (y \Rightarrow x \Rightarrow y) \Rightarrow y \Rightarrow x \Rightarrow z \\ & \Rightarrow \langle \mathrm{W}{\Rightarrow} \rangle & y \Rightarrow x \Rightarrow z \end{array}$$

In this proof, $\langle \mathrm{D}{\Rightarrow} \rangle$, $\langle \mathrm{M}{\Rightarrow} \rangle$ and $\langle \mathrm{W}{\Rightarrow} \rangle$ are justifications which state the reason why we are allowed to write an implication between two propositions. They refer to theorems (possibly axioms) that were introduced earlier in the framework.

The advantage of these types of proofs and this type of reasoning is that it allows us to use the form (syntax) of the formulas as an additional guideline in reasoning.

II. Fuzzy logic

Our world is inherently vague. We do not always use precise statements, e.g. "this man is tall" or "this door is brown". Classical logic on the contrary is precise and (with the right formalism) unambiguous. If we want to be able to reason about statements in our everyday life, we need a mathematical tool. In the 1960's, Lotfi A. Zadeh created such a tool, called "fuzzy logic" [4]. Soon after its dawn the theory of fuzzy logic expanded fast and its applications are in widespread use today, ranging from fuzzy nuclear reactors to fuzzy washing machines.

III. Our goal

In this dissertation, we examine how we can combine these two worlds, the world of fuzzy logic and calculational reasoning. Fuzzy logic has been studied as a logic in some textbooks [5], but not yet as a practical tool for reasoning, as classical formal logic has. Therefore it seems advantageous to construct a calculational fuzzy logic, just like other researchers have constructed a calculational logic for the classical formal logic [2], [3], [1]. This will allow us to reason with fuzzy logic in the same way as we are already able to reason with classical logic.

IV. Calculational fuzzy proposition logic

One of the notational changes we had to make, was switch from prefix-operators, that are normally used by researchers in fuzzy logic, to infix-operators. This was done to prevent the cluttering of formulas with brackets and to create a more visual relationship between arguments, which helps us to reason with the shape of the arguments. Our second observation was that, to make fuzzy logic look as much as possible as classical logic, only a transitive implicator could be used. This enables clearly chaining of formulas as explained in I.

We started from an algebra, since this is more elegant to conduct reasoning than a logical framework, as was already observed by Dijkstra in [3]. From this, we built a calculational framework using continuous t-norms and their residual implicators using the textbook of Petr Hájek [5] as a basis. All other operators were based on the t-norm and the residuum, just as in the aforementioned textbook. We also extended the logic of Hájek with a fuzzy disjunction and proved some theorems about this disjunction.

The result of this calculational fuzzy proposition logic is the ability to construct elegant proofs, just like the ones we know from the calculational classical logic. An example theorem and its calculational proof is the proof for the theorem "Weakening fuzzy disjunction with double negation":

Theorem 1 (WDN$\curlyvee$)

$$\sim(\sim x) \rightsquigarrow x \curlyvee y = 1$$

Proof:

$$\begin{array}{rl} \langle \mathrm{W}\curlywedge \rangle & (\sim x \ \curlywedge \sim y) \rightsquigarrow \sim x \\ \rightsquigarrow \ \langle \mathrm{WCP} \rangle & \sim(\sim x) \rightsquigarrow \sim(\sim x \ \curlywedge \sim y) \\ \approx \langle \mathrm{Def.} \curlyvee \rangle & \sim(\sim x) \rightsquigarrow (x \curlyvee y) \end{array}$$

■

In this proof, $\curlywedge$ is the symbol we chose to represent the t-norm, $\rightsquigarrow$ is the symbol that represents the fuzzy implication and $\sim$ and

$\curlyvee$ are the symbols for the fuzzy negation and the fuzzy disjunction resp. The fuzzy negation is defined by $\sim x = x \rightsquigarrow 0$ and the fuzzy disjunction was defined as $x \curlyvee y = \sim (\sim x \curlywedge \sim y)$.

V. Calculational fuzzy predicate logic

Of course we cannot live with fuzzy propositional logic alone, for we would not come very far. Therefore we had to construct a calculational fuzzy predicate logic. We chose to use the "least upper bound"-operator as the existential quantifier and the "greatest lower bound"-operator as the universal quantifier. The reason is that these have axiomatisations from which we could start. Moreover, these are the most frequently used quantifiers in fuzzy logic applications.

We constructed a typed fuzzy predicate logic, similar to [1]. This means that predicates have a certain domain and are therefore not all expected to range over the same set. This more closely reflects predicates that occur in real-life, for example the predicate "has green eyes", which cannot be applied to houses, but can be applied to humans or other animals. In this typed fuzzy predicate logic we have constructed instantiation and generalisation rules which are very similar to the ones occurring in classical logic. This has the obvious advantage that reasoning in fuzzy calculational logic is exactly like reasoning in classical calculational logic, and therefore easily learnable and applicable. A very elegant proof, which shows this analogy between fuzzy and classical calculational logic is the proof of the left distributivity of $\rightsquigarrow$ over $\bigwedge$ ($\bigwedge$ is the infimum-function, $\overset{\leftharpoonup}{\ }$ is a generic functional of the Funmath formalism [6]). In the proof of this theorem, focus on the reasoning-style, rather than on the proof-details.

Theorem 2 (LD$\rightsquigarrow$/$\bigwedge$ "Distributivity of $\rightsquigarrow$ over $\bigwedge$")

$$q \rightsquigarrow \bigwedge P \rightsquigarrow \bigwedge (q \overset{\rightharpoonup}{\rightsquigarrow} P)$$

Proof:

$$\begin{array}{lll}
q \rightsquigarrow \bigwedge P & & \\
\rightsquigarrow & \langle \text{FINS,T}\rightsquigarrow \rangle & q \rightsquigarrow x \in \mathcal{D}\, P \rightsquigarrow P\, x \\
\approx & \langle \mathcal{D}\,(q \overset{\rightharpoonup}{\rightsquigarrow} P) = \mathcal{D}\, P \rangle & q \rightsquigarrow x \in \mathcal{D}\,(q \overset{\rightharpoonup}{\rightsquigarrow} P) \rightsquigarrow P\, x \\
\approx & \langle \text{SH}\rightsquigarrow \rangle & x \in \mathcal{D}\,(q \overset{\rightharpoonup}{\rightsquigarrow} P) \rightsquigarrow q \rightsquigarrow P\, x \\
\rightsquigarrow & \langle \text{FGEN} \rangle & \bigwedge (q \overset{\rightharpoonup}{\rightsquigarrow} P)
\end{array}$$

■

Though this proof is quite elegant, we have found that not all proofs of the basic theorems in our fuzzy predicate logic could be made this neat. By resorting to a (calculational) order theoretic proof, which is more commonly used by researchers in fuzzy logic, we were often able to create more concise (and equational) proofs.

The reason for this observation is that, like in classical logic, instantiation and generalisation should be used as a "bootstrap" for proving the theorems needed for equational reasoning. Equational reasoning means we only use rules that preserve equivalence. This implies that the only linking operator appearing in an equational proof is the equivalence operator (either fuzzy or crisp, depending on the context). These types of proofs are preferable to proofs using a separation of the equivalence as two independently proved implications, because the aforementioned types are clearer and more concise. Since the order theory we used was embedded in calculational classical logic, it had the advantage of having the equational theorems for quantifiers available, and was therefore able to create more concise proofs.

This does not mean that order theory is better than the fuzzy logic we constructed, however. As we already mentioned, instantiation and generalisation should be considered as a "bootstrap" for proving the necessary theorems about our quantifiers. When we have these basic theorems, the need to resort to the instantiation and generalisation will decrease, the same way it decreased in classical logic, and our logic will be able to construct equational proofs that are just as elegant or even more so than order theoretic proofs. Furthermore, our fuzzy logic has the advantage that it uses only fuzzy operators, has a close resemblance to the classical logic and makes an abstraction from the underlying order theoretic framework.

VI. Conclusions

In this dissertation we immersed ourselves in the problem of how fuzzy logic could be made into a more practical logic for everyday use by researchers in areas related to fuzzy set theory, through the use of the ideas from calculational reasoning. We have shown that fuzzy propositional logic (using a continuous t-norm and its residuum) can be made just as elegant as classical calculational logic by making it calculational. Next to that, we have also shown that order theoretic reasoning in fuzzy logic can, for the biggest part, be abandoned in favour of a reasoning style that is very similar to the reasoning of the classical calculational logic. With the added advantage that our calculational logic uses only fuzzy operators and creates an abstraction from the underlying order theory.

Acknowledgments

The author would like to thank his promotors, Martine De Cock and Raymond Boute, for their big support and very much appreciated help. Some other people deserve to be mentioned here as well. The first of them is David Matthys, who helped very much with his constructive criticism about the format and language used in this dissertation. The second is Hannes Verlinde, who helped setting this dissertation on its tracks by sharing some ideas and insights. The last, but as the cliché says, not least, is my sister Helena, who checked the dissertation for spelling and grammatical mistakes. To all, a big "thank you".

References

[1] Raymond Boute, "Functional declarative language design and predicate calculus: a practical approach," *ACM Transactions on Programming Languages and Systems*, vol. 27, pp. 988–1047, September 2005.

[2] David Gries and Fred B. Schneider, *A logical approach to discrete math*, Springer-Verlag New York, Inc., New York, NY, USA, 1993.

[3] Edsger W. Dijkstra, "How computing science created a new mathematical style," *EWD Archive, University of Texas at Austin*, March 1990.

[4] Lotfi A. Zadeh, "Fuzzy sets," *Information and Control*, vol. 8, no. 3, pp. 338–353, June 1965.

[5] Petr Hájek, *Metamathematics of fuzzy logic*, Kluwer Academic publishers – Trends in logic, 1998.

[6] Raymond Boute, "Concrete generic functionals: Principles, design and applications," *In: Jeremy Gibbons and Johan Jeuring, eds., Generic Programming*, pp. 89–119, 2003.

Inhoudsopgave

Hoofdstuk 1

Inleiding

1.1 Calculationele logica

Logica is doorheen de eeuwen op verschillende manieren bestudeerd. Jammer genoeg bleven deze studies beperkt tot de logica zelf en werd logica niet als een werktuig gezien dat toepasbaar was doorheen verschillende domeinen. Het blijkt echter dat een "toegepaste logica" in de theorie van de informatica van grote noodzaak is om onder andere de correctheid van programma's aan te tonen. Daarom werden dan ook in de laatste decennia (sinds de jaren '80) "calculationele formuleringen" van de klassieke formele logica ontwikkeld, met als doel logica tot een werktuig voor dagelijks redeneren te kneden [Dij90; Bou05b; GS93]. In essentie schrijft men in de calculationele stijl bewijzen neer als een "ketting" van redeneerstappen, waarbij elke schakel verbonden wordt door een operator uit de logica en een verantwoording voor de betreffende stap. Het algemene formaat is dan van de volgende vorm:

$$\begin{array}{ll} p_0 & R_0 \ \langle \text{Verantwoording } p_0 \, R_0 \, p_1 \rangle \ p_1 \\ & R_1 \ \langle \text{Verantwoording } p_1 \, R_1 \, p_2 \rangle \ p_2 \end{array}$$

Hierbij zijn de R_0 en R_1 operatoren uit de taal die een stap verbinden. De eerste stap, van p_0 naar p_1 wordt dan verantwoord door het feit dat $p_0 \, R_0 \, p_1$ geldig is en analoog voor de tweede stap. Een echt bewijs is bijvoorbeeld het volgende calculationele bewijs voor de "Shunting-eigenschap": $(x \Rightarrow y \Rightarrow z) \ \Rightarrow \ y \Rightarrow x \Rightarrow z$

$$\begin{array}{ll} x \Rightarrow y \Rightarrow z & \Rightarrow \ \langle \mathrm{D}{\Rightarrow} \rangle \ \ (x \Rightarrow y) \Rightarrow x \Rightarrow z \\ & \Rightarrow \ \langle \mathrm{M}{\Rightarrow} \rangle \ \ (y \Rightarrow x \Rightarrow y) \Rightarrow y \Rightarrow x \Rightarrow z \\ & \Rightarrow \ \langle \mathrm{W}{\Rightarrow} \rangle \ \ y \Rightarrow x \Rightarrow z \end{array}$$

De uitdrukkingen $\langle D\Rightarrow\rangle$, $\langle M\Rightarrow\rangle$ en $\langle W\Rightarrow\rangle$ zijn de verantwoordingen voor het mogen schrijven van de implicatie tussen de twee regels in het bewijs waar de verantwoording staat. Ze verwijzen naar stellingen (mogelijk axioma's) die reeds eerder werden ingevoerd (wanneer we in een bepaald raamwerk werken).

Het grote voordeel van dit type van bewijzen is dat we door syntactische manipulaties, in plaats van door intuïtief redeneren over de betekenis van uitdrukkingen, zaken kunnen gaan bewijzen. Dit betekent dat we in essentie "rekenen" met logische uitdrukkingen, wat onmiddellijk de naam "calculationele logica" verklaart. Het is immers een calculus van logica. Een gevolg hiervan is dat de structuur van een regel kan gidsen hoe het bewijs moet verlopen. Dit principe wordt vaak aangeduid als het "ut faciant opus signa"-principe, oftewel het "laat de symbolen het werk doen"-principe, onmisbaar om te redeneren over domeinen waar we geen interpretatie tot onze beschikking hebben en een handig hulpmiddel ter ondersteuning van de intuïtie in andere domeinen.

1.2 Vaaglogica

De menselijke wereld bulkt van de vaagheid. We goochelen met concepten zoals "het regent een beetje", "die deur is bruin" (het begrip "bruin" kan men immers niet juist afbakenen) en dergelijke meer. Dit staat echter in schril contrast met de wereld van de wiskunde, waar alles precies en correct afgebakend is. Als we onze menselijke wereld willen modelleren in de wiskunde, dan hebben we dus nood aan een werktuig dat ons toelaat om een dergelijke vaagheid in rekening te brengen. Dit werktuig valt te vinden in de wereld van de vaaglogica, een wereld opgestart door Lotfi A. Zadeh in 1965 met het artikel "Fuzzy Sets" [Zad65]. Deze wereld kende al snel een explosieve groei die leidde tot allerlei toepassingen, gaande van zoekmachines, over auto's, kerncentrales tot zelfs vaagwasmachines die de hoeveelheid en de temperatuur van het water laten afhangen van de "vuilheidsgraad" van de was.

1.3 Opzet van dit werk

Momenteel wordt in toepassingen van de vaaglogica voornamelijk ordetheorie en interpretaties van formules gebruikt om verbanden tussen de operatoren en de kwantoren te bewijzen. Nochtans bestaan er ook logische beschrijvingen van deze structuren, die toelaten om door middel van logische afleidingen stellingen te bewijzen. De reden waarom deze logische structuren niet gebruikt worden is allicht dezelfde als deze die tot voor kort het gebruik van formele logica als praktisch werktuig verhinderde: de beschrijvingen handelen over de logica zelf, maar zijn niet bruikbaar als werktuig in toepassingen van de logica.

Aangezien de calculationele stijl heeft gezorgd voor een eenvoudige en praktisch toepasbare calculationele formele logica, rijst het vermoeden dat we de voordelen van deze calculationele stijl kunnen overbrengen naar de vaaglogica.

Daarom onderzoeken we in dit werk in hoeverre we een calculationele vaaglogica, gebaseerd op dezelfde ideeën als de calculationele formuleringen voor de klassieke logica, kunnen construeren. We bekijken de voordelen en geven tal van voorbeelden van bewijzen die eleganter worden door het gebruiken van deze nieuwe stijl. We zullen ook proberen om de analogie met de klassieke logica zoveel mogelijk te bewaren, omdat dit een gemakkelijke transporteerbaarheid van klassieke logica-bewijzen naar de vaaglogica stimuleert. Tevens levert dit een pedagogisch voordeel wanneer men reeds vertrouwd is met de calculationele klassieke logica en zich wenst te verdiepen in de vaaglogica. De voordelen van onze stijl tegenover de huidige manier van werken zullen we illustreren door vergelijkende voorbeelden te geven van de twee bewijsstijlen voor eenzelfde stelling.

1.4 Funmath

We zullen in dit eindwerk gebruik maken van het Funmath-formalisme. Enerzijds zullen we een algebra waarover we vaaglogische stellingen kunnen afleiden, construeren binnen dit formalisme. Anderzijds zullen we de ideeën uit dit formalisme gebruiken om bepaalde ontwerpsbeslissingen te motiveren en breiden we de "bibliotheek" van het formalisme uit met enkele nieuwe functionalen voor de ordetheorie.

Het Funmath-formalisme vertrekt vanuit het idee om, overal waar dit mogelijk is, wiskundige objecten met functies te beschrijven. Dit idee blijkt veel meer toepasbaar te zijn dan men op het eerste gezicht zou denken [Bou05b; Bou05a]. Sterker nog, het formalisme is zelfs krachtig genoeg om een unificerende basis te zijn voor de continue en discrete wiskunde [Bou05c]. Tevens blijkt dit idee vele fouten uit veelgebruikte wiskundige formalismen weg te kunnen werken.

Dat er nood is aan een dergelijk foutvrij formalisme kan men inzien aan de hand van volgend voorbeeld. Een veelgebruikte vorm om verzamelingen neer te schrijven is aan de hand van het abstractie-teken $\{.\,|\,.\}$. Met deze uitdrukking schrijft men vaak een verzameling van de vorm $\{\, m \in \mathbb{N} \mid m < n \,\}$ neer, maar ook verzamelingen van de vorm $\{\, 2 \cdot n \mid n \in \mathbb{Z} \,\}$. Dit lijkt op het eerste gezicht onschuldig. Wanneer we echter de algemene uitdrukkingen die aan de basis van deze notatie liggen neerschrijven, bekomen we dat $\{\, v \in X \mid p \,\}$ en $\{\, e \mid v \in X \,\}$ beiden geldige uitdrukkingen zijn voor een verzameling (met de metavariabelen v, X, p, e). Nemen we $v\,{:}\,Y$ voor p in de eerste uitdrukking, dan bekomen we een geldige uitdrukking voor een verzameling, $\{\, v \in X \mid v \in Y \,\}$, die duidelijk niet eenduidig een verzameling aanduidt. We bekomen met andere woorden een ambiguïteit.

Een tweede reden waarom we dit formalisme nodig hebben is om rekenregels voor dergelijke ad-hoc-uitdrukkingen te construeren. Het blijkt dat de formulering aan de hand van functies toelaat om deze uitdrukkingen netjes te definiëren en om er op een uniforme wijze rekenregels uit af te leiden.

1.4.1 De taal

De taal van het Funmath-formalisme bestaat uit slechts vier bouwstenen, die door een orthogonale combinatie alle termen kunnen construeren. Om deze bouwstenen te geven, gebruiken we enkele meta-variabelen. We geven kort het type van deze variabelen: i staat voor een (tupel van) identificator(s); v, w zijn (tupels van) variabelen; d en e zijn arbitrair gekozen; p, q en r zijn booleaanse waarden; X en Y zijn verzamelingen; f en g staan voor functies; P en Q staan voor (scherpe) predikaten; F en G staan voor families van functies; S en T zijn families van verzamelingen. Met een "familie van X" bedoelen we een functie die waarden aanneemt in de verzameling X. Een identificator is onze vertaling van het Engelse woord "identifier".

De vier bouwstenen zijn dan:

1. Een *identificator* kan gelijk welke streng van symbolen zijn, met uitzondering van aanduidingssymbolen (dit zijn: de dubbele punt die een binding aanduidt, het filter-symbool $\wedge$ en het abstractie-punt), de ronde haakjes (en), en enkele sleutelwoorden (**def** , **spec**).

   Identificators worden geïntroduceerd door bindingen $i\,{:}\,X \wedge p$, die gelezen moeten worden als "i in X die voldoet aan p". De *filter* $\wedge\, p$ (of **with** p) is optioneel, waarmee we bedoelen dat $n\,{:}\,\mathbb{N}$ en $n\,{:}\,\mathbb{Z} \wedge\, \geq 0$ op hetzelfde duiden.

   Definities van de vorm **def** *binding* introduceren *constanten* met een globale zichtbaarheid ("scope"). Bestaan en uniciteit zijn bewijsverplichtingen, wat niet het geval is voor *specificaties*, die de vorm **spec** *binding* aannemen.

2. Een abstractie van de vorm *binding* . *uitdrukking* duidt een *functie* aan. De identificators die zo worden geïntroduceerd zijn variabelen, met een zichtbaarheid die gelimiteerd is tot de abstractie. Als we f schrijven voor de abstractie $v : X \wedge p \,.\, e$, dan is het domein-axioma $d \in \mathcal{D}\, f \equiv d \in X \wedge p[^v_d$ en is het beeldpuntaxioma $d \in \mathcal{D}\, f \Rightarrow f\, d = e[^v_d$. Hier staat $e[^v_d$ voor substitutie van d voor v.

3. Een *functie-toepassing* of *functie-applicatie* neemt de vorm $f\, e$ aan in de normale *prefix syntax*. Voor een functie-identificator (*operator*), kunnen andere conventies gespecifieerd worden door liggende strepen te introduceren in de definitie, bijvoorbeeld $- \star -$ voor een infix-operator met twee argumenten. Een prefix-definitie heeft voorrang op een infix-definitie. Haakjes kunnen gebruikt worden om de invloed van voorrangsregels te wijzigen, maar kunnen nooit gebruikt worden als een operator. Functie-applicatie kan partieel gebeuren: als $\star$ een infix-operator is, dan voldoen $(a\star)$ en $(\star b)$ aan $(a\star)b = a \star b = a(\star b)$. Variadische toepassing, van de vorm $e{\star}e'{\star}e''{\star}e'''$, wordt geleverd door elastische operatoren.

4. Tupels van de vorm e, e', e'' (met willekeurige lengte n) duiden op een functie met domein $0..n-1$ en met de beeldpunten geïllustreerd door $(e, e', e'')\, 0 = e$ en $(e, e', e'')\, 1 = e'$, etc. De conditionele uitdrukking $(p\, ?\, e' \,\dagger\, e)$ is gedefinieerd aan de hand van tupels door $(p\, ?\, e' \,\dagger\, e) = (e, e')\, p$.

Macro's kunnen gebruikt worden om afkortingen of "syntactische suiker" toe te voegen voor de operatoren uit tabel 1.1. Zo is de uitdrukking d_e bijvoorbeeld een afkorting voor $d \downarrow e$ (filteren). Syntactische suiker wordt gegeven door $e \,|\, v : X \wedge p$ voor $v : X \wedge p \,.\, e$ en $v : X \,|\, p$ voor $v : X \wedge p \,.\, v$ en tenslotte $v := e$ voor $v : \iota\, e$, waarbij ι de singleton-injecteerder is, met als axioma $d \in \iota\, e \equiv d = e$.

1.4.2 Functies

We definiëren een functie f volledig aan de hand van het *domein* $\mathcal{D}\, f$ en de beeldpuntdefinitie. Gelijkheid axiomatiseren we door $f = g \Rightarrow \mathcal{D}\, f = \mathcal{D}\, g \wedge (e \in \mathcal{D}\, f \cap \mathcal{D}\, g \Rightarrow f\, e = g\, e)$ en het omgekeerde van deze regel door de inferentieregel $\mathcal{D}\, f = \mathcal{D}\, g \wedge (v \in \mathcal{D}\, f \cap \mathcal{D}\, g \Rightarrow f\, v = g\, v) \vdash f = g$ (met v niet vrij in f, g).

1.4.3 Elastische operatoren

Elastische operatoren zijn functionalen, zo ontworpen dat ze vrij zijn van de typische gebreken van ad-hoc-abstracties zoals $\sum$, $\lim_{x\to a}$, etc. We noemen ze elastisch omdat we ze kunnen toepassen op tupels van willekeurige lengte.

De scherpe kwantoren $\forall$ en $\exists$ zijn gedefinieerd door $\forall P \equiv P = \mathcal{D}\,P^{\bullet}\,1$ en $\exists P \equiv P \neq \mathcal{D}\,P^{\bullet}\,0$ (de definities voor $^{\bullet}$ vindt men terug in tabel 1.1). Dit zijn puntvrije uitdrukkingen voor $\forall\, x\!:\!\mathcal{D}\,P\,.\,P\,x$ en $\exists\, x\!:\!\mathcal{D}\,P\,.\,P\,x$, maar leveren door het feit dat tupels functies zijn, ook nieuwe uitdrukkingen op zoals $\forall\,(p,q) = p \wedge q$ en $\exists\,(p,q) = p \vee q$. We kunnen voor elke gebruikelijke infix-operator $\star$ een dergelijke *elastische extensie* E construeren, zodat $x \star y = E(x,y)$.

De waardeverzamelingsoperator $\mathcal{R}$ heeft als axioma $e \in \mathcal{R}\,f \equiv \exists\, x\!:\!\mathcal{D}\,f\,.\,f\,x = e$. Als we $\{-\}$ gebruiken als synoniem voor $\mathcal{R}$, dan kunnen we hiermee heel eenvoudig de notaties voor verzamelingen construeren zoals $\{\, m\!:\!\mathbb{N} \mid m < n \,\}$ en $\{\, 2 \cdot n \mid n\!:\!\mathbb{Z} \,\}$. Doordat we $\in$ nooit misbruiken als een binding, is een uitdrukking zoals $\{\, n\!:\!\mathbb{N} \mid n \in \mathbb{Z} \,\}$ niet ambigu en vermijden we de eerder vermelde defecten in de traditionele notaties.

Variadische functietoepassing is het alterneren van een infix-operator met zijn argumenten. We nemen dit uniform aan als zijnde de toepassing van een elastische operator op een argumentenlijst. Een voorbeeld hiervan is $\forall\,(p,q,r) \equiv p \wedge q \wedge r$.

Aan traditionele ad-hoc-abstracties hecht men meestal een “bereik”, zoals $\sum\limits_{i=m}^{n}$. Elastische operatoren kunnen hetzelfde effect bekomen door het type van het argument te wijzigen. We noemen dit *domeinmodulatie* (zie [Bou05d]).

1.4.4 Generische functionalen

Generische functionalen breiden veelgebruikte functionalen uit naar arbitraire functies door de beperkingen op hun argumenten weg te halen. De functie-inversie f^{-} vereist bijvoorbeeld traditioneel dat de functie f injectief is en de functie-compositie $f \circ g$ vereist traditioneel dat $\mathcal{R}\,g \subseteq \mathcal{D}\,f$. In het Funmath-formalisme heffen we al deze restricties op door het domein van de resulterende functie zo te definiëren dat de beeldpuntdefinitie vrij is van applicaties die buiten het domein zouden vallen. Een voorbeeld hiervan is $f \circ g = x\!:\!\mathcal{D}\,g \wedge g\,x \in \mathcal{D}\,f\,.\,f\,(g\,x)$.

De generische functionaal voor het Cartesisch product, zoals gedefinieerd in [Bou03], is zeer algemeen, maar heeft de eigenschap dat toepassing op tupels van verzamelingen het klassieke Cartesisch product oplevert, meer bepaald: $A \times B = \bigtimes\,(A,B)$

Wat we in dit werk nog zullen gebruiken is een afhankelijk type, dat gedefinieerd wordt aan de hand van het carthesiaans product door: $X \ni v \to Y_v = \times v \in X . Y_v$. Dit betekent dat de waardeverzameling van deze functie afhankelijk zal zijn van het element waarop we de functie toepassen.

1.4.5 Rekenregels

De rekenregels voor deze functies en de kwantoren zullen we niet allemaal opnemen in deze inleiding. Wel zullen we, als we een bepaalde rekenregel gebruiken die hier niet vermeld staat, deze vermelden met een afkorting. Na het bewijs waar de rekenregel wordt gebruikt verklaren we dan welke regel we met de afkorting bedoelden. Een lezer die meer wenst te weten over de rekenregels verwijzen we naar [Bou05b; Bou05d].

1.4.6 Opmerking

We kiezen in dit eindwerk resoluut voor het gebruik van predikaten in plaats van verzamelingen. Er bestaat weliswaar een 1 op 1 verband tussen de twee, toch heeft het gebruik van predikaten enkele voordelen:

- Uitdrukkingswijze: in het geval van vaagpredikaten kunnen we eenvoudigweg spreken van “de mate waarin een object x aan een gegeven eigenschap P voldoet”. Wanneer we dit formuleren met verzamelingen krijgen we eerder een uitdrukking als “de mate waarin een object x behoort tot een gegeven verzameling X van elementen die voldoen aan de eigenschap P”.

- Rekenregels: de formele rekenregels voor predikaten zijn gestroomlijnder dan deze voor de verzamelingen. Predikatenrekenen is in feite de meest elegante wijze om de formele rekenregels voor verzamelingen uit te drukken en er symbolisch over te redeneren.

Verzamelingen blijven echter wel nodig om typedefinities te kunnen geven. Daarom komen ze in dit afstudeerwerk wel voor naast de predikaten. Dit voorkomen wordt echter strikt beperkt tot waar dit noodzakelijk is.

1.4.7 Lijst van de benodigde definities

We vatten de Funmath-definities die we zullen gebruiken in de loop van dit afstudeerwerk samen in tabel 1.1, zodat ze snel vindbaar zijn bij het lezen. In deze tabel komen enkele uitdrukkingen voor, met de volgende types: d, e: arbitrair gekozen; f, g: functies; p, q: booleaanse waarden; X, Y: verzamelingen; P: predikaat; F: familie van functies (= functies met eenzelfde waardeverzameling); S: familie van verzamelingen. De gebruikte variabelen zijn, naast de ongerestricteerde variabele z, de nieuwe variabelen x en y, welke niet vrij mogen voorkomen in de uitdrukkingen.

Operator	**Definitie**
Abstractie-macro's	
$e \mid z : X \mathrel{\dot{\wedge}} p$	$(e \mid z : X \mathrel{\dot{\wedge}} p) = (z : X \mathrel{\dot{\wedge}} p \,.\, e)$
$z : X \mid p$	$(z : X \mid p) = (z : X \mathrel{\dot{\wedge}} p \,.\, z)$
Operatoren voor constante functies (constante en lege functie, singleton, één-puntsregel)	
$\bullet$	$X^{\bullet} e = x : X \,.\, e$
ε	$\varepsilon = \emptyset^{\bullet} e$
ι	$y \in \iota\, x \equiv y = x$
$\mapsto$	$d \mapsto e = \iota\, d^{\bullet} e$
Operatoren van functies naar verzamelingen (domein, range)	
$\mathcal{D}$	Axiomatisch gedefinieerd voor elke functie (in abstracties en axioma voor $\rightarrow$)
$\mathcal{R}$	$y \in \mathcal{R}\, f \equiv \exists\, x : \mathcal{D}\, f \,.\, f x = y$ (als f een abstractie is schrijven we $\mathcal{R}\, f$ als $\{f\}$
Bdom	$\mathsf{Bdom}\, f = \{\, x : \mathcal{D}\, f \mid \forall\, y : \mathcal{D}\, f \,.\, f\, x = f\, y \Rightarrow x = y \,\}$
Bran	$\mathsf{Bran}\, f = \{\, f\, x \mid x : \mathsf{Bdom}\, f \,\}$
fam	$f \in \mathsf{fam}\, Y \equiv \forall\, x : \mathcal{D}\, f \,.\, f x \in Y$
$\rightarrow$	$f : X \rightarrow Y \equiv \mathcal{D}\, f = X \wedge \forall\, x : \mathcal{D}\, f \cap X \,.\, f x \in Y$
Functietransformeerders met 1 functieargument (restrictie, filter, inverse)	
$\rceil$	$f \rceil X = x : \mathcal{D}\, f \cap X \,.\, f x$ (merk op: $f \rceil X \in \mathcal{D}\, f \cap X \rightarrow \mathcal{R}\, f$)
$\downarrow$	$f \downarrow P = f \rceil (\mathcal{D}\, f \downarrow P)$, met $\downarrow$ voor verzamelingen: $X \downarrow P = \{\, x : X \cap \mathcal{D}\, P \mid P\, x \,\}$
$\_^{-}$	$f^{-} \in \mathsf{Bran} \rightarrow \mathsf{Bdom}\, f$ en $\forall\, x : \mathsf{Bdom}\, f \,.\, f^{-}(f\, x) = x$
Functietransformeerders met 2 functieargumenten (compositie)	
$\circ$	$f \circ g = x : \mathcal{D}\, g \mathrel{\dot{\wedge}} g\, x \in \mathcal{D}\, f \,.\, f(g\, x)$
Directe uitbreidingsoperatoren (voor een operator g en een infix operator $\star$)	
$\overline{\_}$	$\overline{g}\; f = g \circ f$
$\widehat{\_}$	$f \mathbin{\widehat{\star}} g = (\star) \circ (f, g)^{T}$ $(= x : \mathcal{D}\, f \cap \mathcal{D}\, g \mathrel{\dot{\wedge}} (f x, g\, x) \in \mathcal{D}\, (\star) \,.\, f x \star g\, x)$
$\overleftarrow{\_}$	$f \mathbin{\overleftarrow{\star}} x = f \mathbin{\widehat{\star}} (\mathcal{D}\, f^{\bullet} x)$ (voor willekeurige x en f)
$\overrightarrow{\_}$	$x \mathbin{\overrightarrow{\star}} f = (\mathcal{D}\, f^{\bullet} x) \mathbin{\widehat{\star}} f$ (voor willekeurige x en f)

Tabel 1.1: Overzicht van de benodigde Funmath-operatoren

Hoofdstuk 2

Ordetheorie

Het begrip "orde" is van groot belang in de vaaglogica. Vaak zijn we immers niet geïnteresseerd in de exacte waarde van een uitspraak, maar wel in het feit of een bepaalde uitspraak al dan niet meer waar is dan een andere. Stel bijvoorbeeld dat we een goed bespeelbare gitaar wensen te kopen en van enkele gitaren de criteria bekijken zoals houtsoort, passieve of actieve versterking, nekprofiel, brugsoort, en dergelijke meer. Dan zijn we niet geïnteresseerd in hoezeer de uitspraak "De Jackson-gitaar is goed bespeelbaar" waar is, maar wensen we wel te weten welke gitaar het best bespeelbaar is van alle gitaren. Het modelleren van dergelijke zaken is hetgeen waar de vaaglogica zich met bezighoudt. Om zaken zoals "x is beter dan y" te kunnen modelleren hebben we echter een ordening van deze objecten nodig. Omwille van deze reden voeren we in dit hoofdstuk verschillende concepten uit de ordetheorie in, die we in verdere hoofdstukken nodig zullen hebben.

Allereerst voeren we gemakshalve twee type-definities in, om het schrijfwerk in de verdere definities en eigenschappen te verminderen. Voor een willekeurige verzameling X definiëren we:

Definitie (Dyadische relatie over X). $\mathsf{rel}_X = X \times X \to \mathbb{B}$

Definitie (Predikaat over X). $\mathsf{pred}_X = X \to \mathbb{B}$

2.1 Relatiekarakterisaties

We kunnen relaties indelen naargelang hun eigenschappen. Een overzicht van de onderverdeling met betrekking tot eigenschappen relevant om van een "orderelatie" te kunnen spreken is te

Karakteristiek	P	Beeld
reflexiviteit	Refl	$\forall\, x : X \,.\, x\, R\, x$
irreflexiviteit	Irfl	$\forall\, x : X \,.\, \neg(x\, R\, x)$
symmetrisch	Symm	$\forall\, (x, y) : X^2 \,.\, x\, R\, y \Rightarrow y\, R\, x$
asymmetrisch	Asym	$\forall\, (x, y) : X^2 \,.\, x\, R\, y \Rightarrow \neg(y\, R\, x)$
antisymmetrisch	Ants	$\forall\, (x, y) : X^2 \,.\, x\, R\, y \Rightarrow y\, R\, x \Rightarrow x = y$
transitief	Trns	$\forall\, (x, y, z) : X^3 \,.\, x\, R\, y \Rightarrow y\, R\, z \Rightarrow x\, R\, z$
totaal	Totl	$\forall\, (x, y) : X^2 \,.\, x\, R\, y \vee y\, R\, x$
equivalentie	EQ	Trns $R \wedge$ Refl $R \wedge$ Symm R
pre-ordening	PR	Trns $R \wedge$ Refl R
partiële ordening	PO	PR $R \wedge$ Ants R
totale ordening	TO	PO $R \wedge$ Totl R
strikte ordening	SO	Irfl $R \wedge$ Trns R

Tabel 2.1: Classificatie van relaties

vinden in tabel 2.1, afkomstig uit [Bou05d]. In de eerste kolom vindt men de gangbare naam voor de eigenschap terug. De elementen in kolom P van deze tabel duiden op het respectievelijke predikaat dat bij de eigenschap hoort. Dit (scherp) predikaat beeldt een willekeurige relatie R af op $\mathbb{B} := \{0, 1\}$, waarbij 0 staat voor "de relatie heeft de eigenschap niet" en 1 voor "de relatie heeft de eigenschap". In kolom "Beeld" staat de beelddefinitie, waarbij R een willekeurige relatie is waarop het predikaat wordt toegepast. De eerste lijn definieert bijvoorbeeld de functie Refl, met als beelddefinitie Refl $R \equiv \forall\, x : X \,.\, x\, R\, x$, te lezen als "de relatie R bezit de eigenschap reflexiviteit als elk element uit X in relatie staat met zichzelf".

In de tabel kan men aflezen dat we vier soorten relaties hebben: de pre-ordening, de partiële ordening, de totale ordening en de strikte ordening. De pre-ordening, de partiële ordening en de totale ordening hebben telkens meer eigenschappen (de partiële ordening is dus bijvoorbeeld een speciaal geval van de pre-ordening). Wanneer we over een "orderelatie" spreken, bedoelen we een relatie die minstens een partiële ordening is, zoals uiteraard de partiële ordening zelf en de totale ordening. De andere relaties zullen we aanduiden met hun specifieke naam.

Een lezer die vertrouwd is met de definities uit andere teksten, zoals [Ker06] kan enigszins verbaasd zijn door het feit dat we hier een ordening niet identificeren met een koppel (X, R), waarbij X een verzameling is en R een dyadische relatie over X. De reden hiervoor is dat men in het Funmath-formalisme tracht om zaken zo elegant en kort mogelijk neer te schrijven wanneer dit mogelijk is. Het neerschrijven van een ordening als een koppel (X, R) is in essentie niet nodig. Wanneer we de relatie R definiëren, kunnen we immers onmiddellijk in de definitie de verzameling X vastleggen door het domein van deze relatie zorgvuldig te kiezen. Zo kunnen we het koppel $([0,1], \leq)$ neerschrijven als **def** $\leq : \mathsf{rel}_{[0,1]}$. Deze definitie lijkt langer, maar sowieso zullen we (als we het koppel gebruiken) de relatie $\leq$ ergens moeten definiëren en dus deze type-uitdrukking daar neerschrijven, waardoor we globaal gezien schrijfwerk besparen. Eveneens is het neerschrijven van de definitie aan de hand van **def** uniformer (en dus duidelijker, want men hoeft geen speciale notatie te doorgronden) dan het introduceren van een ad-hoc-uitdrukking aan de hand van een koppel, waardoor dit beter in de achterliggende gedachte van het Funmath-formalisme past.

2.2 Begrippen i.v.m. orderelaties

2.2.1 Definities

We hebben verschillende mogelijkheden om wat we taalkundig "een element aan de boven- of onderkant van een predikaat" noemen, wiskundig uit te drukken. Enerzijds hebben we om van een element aan bijvoorbeeld de "bovenkant van een predikaat" te spreken een ordening nodig die zegt welk element voor een ander komt. Anderzijds hebben we nog specifieke begrippen nodig die we hier invoeren aan de hand van tabel 2.2, afkomstig uit [Bou05d]. We leggen in de volgende paragrafen de begrippen en de structuur van de tabel uit.

In de tabel staat $\prec$ voor een willekeurige relatie over een willekeurige verzameling X, zonder enige beperking op het type (we eisen dus niet dat het een orderelatie is). Het predikaat P is een predikaat waarover we uitspraken van het type "x is een ondergrens onder de relatie $\prec$ van P" en dergelijke meer willen uitdrukken. Het type van P is dan ook pred_X, zodat $P\,x = 1$ wanneer het element x de eigenschap P bezit en $P\,x = 0$ indien dit niet het geval is. We verkiezen, zoals eerder vermeld, een formulering met predikaten boven een formulering met verzamelingen omdat dit eleganter is in ons functioneel formalisme waar we alles als een functie trachten te beschouwen.

De functies uit de tabel zijn zogenaamde "predikatenomvormers". Dit betekent dat de functies uit de tabel een predikaat afbeelden op een nieuw predikaat. Een uitdrukking zoals

Naam	Symbool	Beeld:
Ondergrens	lb	$\mathsf{lb}_{\prec} P\,x \equiv \forall\, y : X\,.\, P\,y \Rightarrow x \prec y$
Kleinste	lst	$\mathsf{lst}_{\prec} P\,x \equiv P\,x \wedge \mathsf{lb}_{\prec} P\,x$
Minimaal element	min	$\mathsf{min}_{\prec} P\,x \equiv P\,x \wedge \forall\, y : X\,.\, y \prec x \Rightarrow \neg(P\,y)$
Bovengrens	ub	$\mathsf{ub}_{\prec} P\,x \equiv \forall\, y : X\,.\, P\,y \Rightarrow y \prec x$
Grootste	gst	$\mathsf{gst}_{\prec} P\,x \equiv P\,x \wedge \mathsf{ub}_{\prec} P\,x$
Maximaal element	max	$\mathsf{max}_{\prec} P\,x \equiv P\,x \wedge \forall\, y : X\,.\, x \prec y \Rightarrow \neg(P\,y)$
Kleinste bovengrens	lub	$\mathsf{lub}_{\prec} = \mathsf{lst}_{\prec} \circ \mathsf{ub}_{\prec}$
Grootste ondergrens	glb	$\mathsf{glb}_{\prec} = \mathsf{gst}_{\prec} \circ \mathsf{lb}_{\prec}$

Tabel 2.2: Benodigde begrippen uit de ordetheorie

$\mathsf{lb}_{\prec} P$ levert dus een nieuw predikaat op, dat we kunnen toepassen op een element $x : X$. Met de gebruikelijke conventie omtrent hogere-ordefuncties waarbij $f\,x\,y$ staat voor $(f\,x)\,y$ moet de volledige uitdrukking $\mathsf{lb}\ P\,x$ gelezen worden als $(\mathsf{lb}_{\prec} P)\,x$, waarbij $\mathsf{lb}_{\prec} P$ een nieuwe functie $P' : \mathsf{rel}_X$, met $P'\,x = \forall\, y : X\,.\, P\,y \Rightarrow x \prec y$ is die dan wordt toegepast op x.

Het type van deze predikatenomvormers is $\mathsf{rel}_X \to \mathsf{pred}_X \to \mathsf{pred}_X$, met de conventie voor hogere-ordefuncties dat $X \to Y \to Z$ staat voor $X \to (Y \to Z)$. Het eerste argument uit rel_X is de relatie die een zekere ordening zal induceren op X (zonder dat we specifieke voorwaarden met betrekking tot orde-eigenschappen opleggen aan deze relatie!), genoteerd met $\prec$ in kolom "Beeld". Het tweede argument is het predikaat waarvoor we de eigenschap willen controleren, genoteerd als P, zoals hiervoor vermeld. De uitdrukking $\mathsf{lb}_{\prec} P\,x$ is dus bijvoorbeeld waar wanneer het element x uit X een ondergrens is van het predikaat P onder de relatie $\prec$.

De eigenschappen met de naam "kleinste bovengrens" en "grootste ondergrens" worden ook vaak aangeduid als respectievelijk "infimum" en "supremum". We zullen verderop operatoren ontwikkelen die een predikaat afbeelden op zijn infimum, resp. zijn supremum, dus op de kleinste bovengrens, resp. grootste ondergrens. Op veel plaatsen, zoals [Ker06], wordt een "*max*"-functie gebruikt om een predikaat af te beelden op zijn maximum. Voor de duidelijkheid willen we vermelden dat een "maximum" van een predikaat niet hetzelfde is als een "maximaal element", maar dat een "maximum" van een predikaat hetzelfde is als een "grootste element" van een predikaat.

We vermelden ten slotte kort een belangrijke orderelatie, namelijk de "standaardordening" van de reële getallen, genoteerd als $\leq$. Deze orderelatie is een totale orderelatie (en dus transitief, reflexief, anti-symmetrisch en totaal) over de reële getallen die een belangrijke rol zal spelen in de verdere hoofdstukken.

2.2.2 Enkele eigenschappen

Uit [Bou05d] halen we volgende eigenschappen:

0. Als $\prec$ reflexief is, dan $\forall\,(y\!:\!X\,.\,x \prec y \Rightarrow P\,y) \Rightarrow P\,x$
1. Als $\prec$ transitief is, dan is $\mathsf{ub}_{\prec}\,P$ monotoon m.b.t. $\prec$
2. Als P monotoon is m.b.t. $\prec$, dan is $\mathsf{lst}_{\prec}\,P\,x \equiv P\,x \wedge \forall\,(y\!:\!X\,.\,P\,y \equiv x \prec y)$
3. Als $\prec$ reflexief en transitief is, dan is $\mathsf{lub}_{\prec}\,P\,x \equiv \forall\,(y\!:\!X\,.\,\mathsf{ub}\;P\,y \equiv x \prec y)$
4. Als $\prec$ antisymmetrisch is, dan $\mathsf{lst}_{\prec}\,P\,x \wedge \mathsf{lst}_{\prec}\,P\,y \Rightarrow x = y$ (uniciteit)

Twee gevolgen van deze definities zijn, dat als we eigenschap (3) voluit schrijven (met $\preceq$ een reflexieve operator), we volgende uitdrukkingen bekomen:

- Eig. 3 lub: $\mathsf{lub}_{\preceq}\,P\,x \equiv \forall\,(y\!:\!X\,.\,x \preceq y \equiv \forall\,z\!:\!X_P\,.\,z \preceq y)$
- Eig. 3 lub: $\mathsf{glb}_{\preceq}\,P\,x \equiv \forall\,(y\!:\!X\,.\,y \preceq x \equiv \forall\,z\!:\!x_P\,.\,y \preceq z)$

De afkortingen die voor de uidrukkingen staan zijn de namen die we zullen gebruiken om te verwijzen naar deze eigenschappen. Twee andere eigenschappen die in verdere hoofdstukken gebruikt zullen worden zijn de geïnduceerde ordening en de geïnduceerde gelijkheid:

Stelling 1 (GO "Geïnduceerde ordeningen")**.** *Stel* $- \preceq - : X^2 \to \mathbb{B}$*. Als* $\preceq$ *reflexief en transitief is dan geldt voor willekeurige* x *en* y *in* X*:*

$$x \preceq y \equiv \forall\,z\!:\!X\,.\,z \preceq\Rightarrow z \preceq y$$

$$x \preceq y \equiv \forall\,z\!:\!X\,.\,y \preceq z \Rightarrow x \preceq z$$

Stelling 2 (GG "Geïnduceerde gelijkheden")**.** *Stel* $- \preceq - : X^2 \to \mathbb{B}$*. Als* $\preceq$ *reflexief en anti-symmetrisch is dan geldt voor willekeurige* x *en* y *in* X*:*

$$x = y \equiv \forall\,z\!:\!X\,.\,z \preceq x \equiv z \preceq y$$

$$x = y \equiv \forall\,z\!:\!X\,.\,x \preceq z \equiv y \preceq z$$

De bewijzen voor deze stellingen zijn terug te vinden in [Dij98] en volgen evident uit de gestelde voorwaarden. We zullen dankbaar gebruik maken van deze eigenschappen in het hoofdstuk over de vaagpredikatenlogica om enkele gelijkheden en ongelijkheden aan te tonen door te vertrekken van de ongelijkheden in het rechterlid.

Opmerking. *Wanneer we een stelling neerschrijven en deze benoemen met bijvoorbeeld GO "Geïnduceerde ordeningen", dan staat het eerste deel (hier: "GO") voor de afkorting die we zullen gebruiken om deze stelling aan te duiden in bewijsvoeringen. Het stuk tussen de aanhalingstekens (in het voorbeeld: "Geïnduceerde ordeningen") is de volledige naam van de stelling. De belangrijkste stellingen worden, samen met hun afkortingen, telkens gebundeld in een tabel op het einde van het hoofdstuk, om het opzoeken ervan te vergemakkelijken. Tevens is achteraan dit eindwerk een volledig overzicht met alle benodigde stellingen en hun afkortingen opgenomen, dat geschikt is om dubbelzijdig af te drukken, dubbel te vouwen en als bladwijzer te gebruiken. In de gedrukte versies zit een afgedrukt en dubbelgevouwen exemplaar reeds achteraan bijgevoegd.*

2.2.3 De supremumoperatoren

Daar in de literatuur over Funmath, zoals [Bou05d; Bou05b; Bou05a], de algemene functie om een predikaat af te beelden op haar supremum niet uitgewerkt staat, maar enkel een supremumfunctie voor functies met een reëel codomein en een functie die verzamelingen afbeeldt op hun supremum, zullen we hier twee definities opstellen aan de hand van het trilogieprincipe. Een eerste definitie beeldt een predikaat af op zijn supremum. Een tweede definitie beeldt een functie af op het supremum van haar waardeverzameling. De tweede definitie is handig omdat ze toelaat om een infixoperator zoals $a \sqcup b$ af te leiden als een toepassing van een operator $\bigsqcup$ op een tupel (a, b), zonder een ad-hoc-notatie, zoals we verderop zullen tonen.

2.2.3.1 Het trilogieprincipe

Vooraleer we beginnen moeten we natuurlijk het trilogieprincipe uitleggen. Het trilogieprincipe is een algemene manier om een nieuwe operator te definiëren aan de hand van een gegeven relatie die het verband tussen een punt uit het domein van de operator en zijn beeldpunt uitdrukt. In wat volgt staan X en Y voor een willekeurige verzameling. We gebruiken de conventie dat het type van relaties wordt neergeschreven aan de hand van $range \times domain$ in plaats van $domain \times range$. De reden waarom deze conventie verkieslijker is, wordt uitgelegd in [Qui69].

Het trilogieprincipe bestaat nu uit drie stappen, namelijk:

1. Een grove karakterisatie van het domein aan de hand van de gegeven relatie, zodat elk element in het domein van de operator een tegenhanger heeft in de relatie. Concreet definiëren we hier een predikaat $exists : \mathsf{pred}_X$ voor de gegeven $R : Y \times X$ waaruit we de operator wensen op te bouwen, zodat $exists\, x = \exists\, y : Y \,.\, y\, R\, x$.

2. Een verfijning van het domein zodat we een unieke functiewaarde bekomen voor elk element in het verfijnde domein. Concreet definiëren we hier opnieuw een predikaat $uniq : \mathsf{pred}_X$ zodat voor de gegeven relatie R het predikaat zijn beelddefinitie gegeven wordt door $uniq\, x = !\,(R\, x)$
De operator ! wordt gedefinieerd door:

$$\mathbf{def}\ ! : \mathsf{Pred} \to \mathbb{B}\ \mathbf{with}\ !\, P \equiv \forall\, (x, x') : (\mathcal{D}\, P)^2 \,.\, P\, x \wedge P\, x' \Rightarrow x = x'$$

waardoor $uniq\, x$ zich herleidt tot:

$$\begin{aligned} uniq\, x \quad & \equiv \langle \text{Def. } uniq \rangle\ !\,(R\, x) \\ & \equiv \quad \langle \text{Def. } ! \rangle \quad \forall\, (y, y') : Y^2 \,.\, y\, R\, x \wedge y'\, R\, x \Rightarrow y = y' \end{aligned}$$

wat duidelijk de gewenste uniciteit van de beeldwaarde voor een bepaald punt uit het domein is (y zal $f\, x$ worden in de volgende stap).

3. De uiteindelijke operatordefinitie, door het domein van de relatie te filteren met bovenstaande functies en de beelddefinitie impliciet te geven aan de hand van de relatie. Concreet komt dit dus neer op een definitie van een operator f als:

$$\mathbf{def}\ f : X_{exists\, \widehat{\wedge}\, uniq} \to Y\ \mathbf{with}\ (f\, x)\, R\, x$$

2.2.3.2 Supremumoperator voor predikaten

Omwille van de genericiteit zullen we hier geparametriseerde operatoren construeren, zodat we aan onze supremumoperator kunnen meegeven welke relatie we wensen te gebruiken om de elementen die voldoen aan het predikaat of de elementen uit de waardeverzameling van het functieargument te ordenen.

We wensen een operator te construeren die een predikaat afbeeldt op haar supremum, waaruit volgt dat de operator $\mathsf{lub}_{\prec}$ een goede keuze is als relatie. We kunnen deze functie immers zien als een relatie van pred_X naar X. De functies *predhaslub*, *preduniq* en de uiteindelijke operatordefinitie zullen door de parametrisatie een lichtjes ander type hebben dan in de algemene beschouwing hiervoor (de parameter $\prec\ : \mathsf{rel}_X$ moeten we immers in het type opnemen), maar zijn voor de rest volledig analoog opgebouwd als in de algemene bespreking hierboven.

1. Karakterisatie van het domein:

$$\textbf{def } predhaslub_{-0} : \mathsf{rel}_X \to \mathsf{pred}_X \to \mathbb{B} \textbf{ with } predhaslub_{\prec} P \equiv \exists\,(\mathsf{lub}_{\prec} P)$$

2. Uniciteit:

$$\textbf{def } preduniq_{-0} : \mathsf{rel}_X \to \mathsf{pred}_X \to \mathbb{B} \textbf{ with } preduniq_{\prec} P \equiv !\,(\mathsf{lub}_{\prec} P)$$

   Waar ! gedefinieerd is zoals hierboven.

3. De uiteindelijke supremumoperator wordt hier dan:

$$\textbf{def } \bigvee_{-0} : \mathsf{rel}_X \ni \prec \to (\mathsf{pred}_X)_{predhaslub_{\prec}\,\widehat{\wedge}\,preduniq_{\prec}} \to X \textbf{ with } \mathsf{lub}_{\prec} P\,(\bigvee_{\prec} P)$$

Opmerking. *Normaal volgt bij een impliciete definitie na "**with**" een gekwantificeerde formule. In deze en verdere formules is echter de kwantificering duidelijk door de type-definitie van de operator en kunnen we bijgevolg zonder ambiguïteiten te introduceren de kwantificering weglaten om een overzichtelijkere definitie te bekomen. Voor de geïnteresseerde lezer vermelden we dat de gekwantificeerde uitdrukking* $\forall\, P : \mathcal{D}\,(\bigvee_{\prec})\,.\,\mathsf{lub}\,P\,(\bigvee_{\prec})$ *is.*

2.2.3.3 Supremumoperator voor families

Voor de supremumoperator met functies van het type $\mathsf{fam}\,X$ als argument gebruiken we de relatie $R : \mathsf{fam}\,X \times X \to X$ zodat $f\,R\,x = \mathsf{lub}_{\prec}\,(\in \mathcal{R}\,f)\,x$, met $\prec\ : \mathsf{rel}_X$. We bekomen dan:

1. Karakterisatie van het domein:

$$\textbf{def } haslub_{-0} : \mathsf{rel}_X \to \mathsf{fam}\,X \to \mathbb{B} \textbf{ with } haslub_{\prec} f \equiv \exists\,(\mathsf{lub}_{\prec}\,(\in \mathcal{R}\,f))$$

2. Uniciteit:

$$\textbf{def } uniq_{-0} : \mathsf{rel}_X \to \mathsf{fam}\,X \to \mathbb{B} \textbf{ with } uniq_{\prec} f \equiv !\,(\mathsf{lub}_{\prec}\,(\in \mathcal{R}\,f))$$

3. De uiteindelijke supremumoperator:

$$\textbf{def } \bigsqcup_{-0} : \mathsf{rel}_X \ni \prec \rightarrow (\mathsf{fam}\, X)_{haslub_{\prec} \,\widehat{\wedge}\, uniq_{\prec}} \rightarrow X \;\; \textbf{with } \mathsf{lub}_{\prec} (\in \mathcal{R}\, f)\, (\bigsqcup_{\prec} f)$$

We dienen nog aan te stippen dat onder bepaalde voorwaarden *haslub* en/of *uniq* constante functies zijn. Voor *uniq* is dit bijvoorbeeld het geval wanneer de ordening $\prec$ die gebruikt wordt antisymmetrisch is, zoals vermeld in sectie 2.2.2.

Het voordeel van deze definitie is dat we nu een infix-versie van deze operator kunnen definiëren als een toepassing van de operator op een koppel. We weiden hier verder over uit in sectie 2.2.6. Tevens laat deze definitie ons toe om ad-hoc-uitdrukkingen zoals $\sup_{i \in I} a_i$ formeel te definiëren, zodat we er juist met kunnen rekenen. Een uitdrukking zoals $\sup_{i \in I} a_i$ is bijvoorbeeld niks meer dan de toepassing van $\bigsqcup$ op een rijtje van a_i's uit een verzameling X met een bepaalde gekende relatie $\prec\; : \mathsf{rel}_X$. In het Funmath-formalisme is een rij een functie, in dit geval $A : I \rightarrow X$ (I is de indexverzameling van de rij), waardoor $\sup_{i \in I} a_i$ formeel uitgedrukt $\bigsqcup_{\prec} i : I \,.\, A\, i$ wordt. Als we deze uitdrukking puntvrij noteren krijgen we $\bigsqcup_{\prec} A$.

Opmerking. *In de meeste teksten over ordetheorie veronderstelt men dat de relatie die de elementen uit X ordent gekend is binnen een bepaalde context. Men laat daarom vaak de expliciete parametrisatie van de supremumoperator weg (zeker in het geval men de notatie met sup gebruikt). Wij zullen in het vervolg deze conventie volgen en veronderstellen dat de relatie waarmee we $\bigsqcup$ parametriseren gekend is. Voor de andere operatoren waarvan we een geparametriseerde vorm hebben ingevoerd zullen we éénzelfde conventie volgen. Dit verhindert een overvloedigheid aan parameters in formules, zodat de essentie ervan beter zichtbaar wordt. Wanneer duidelijkheid omtrent de relatie gewenst is, voegen we uiteraard de parameter toe.*

2.2.3.4 Verband tussen de twee supremumoperatoren

Soms blijkt het nodig te wisselen tussen de twee supremumoperatoren (bijvoorbeeld bij het gebruiken van een commuteringseigenschap met het supremum). Het volgende verband tussen de twee supremumoperatoren biedt daar een helpende hand (we laten in de formulering voor de duidelijkheid de relatieparameter weg. Beide operatoren moeten uiteraard met dezelfde parameter geïnstantieerd zijn):

Stelling 3.

$$P \in \mathcal{D}\,(\bigvee) \Rightarrow (\bigvee P = \bigsqcup\, (x : \mathcal{D}\, P \mid P\, x))$$

Bewijs. Stel $P' := \in \mathcal{R}\,(x : \mathcal{D}\,P \mid P\,x)$ en $f := x : \mathcal{D}\,P \mid P\,x$ om schrijfwerk te besparen, dan:

$$\begin{array}{lll} & \langle \text{Def. } \bigvee \rangle & \mathsf{lub}\,P\,(\bigvee P) \\ \equiv & \langle \text{Lemma 1} \rangle & \mathsf{lub}\,P'\,(\bigvee P) \\ \equiv & \langle \text{Def. } \bigsqcup \rangle & \mathsf{lub}\,P'\,(\bigvee P) \wedge \mathsf{lub}\,P'\,(\bigsqcup f) \\ \Rightarrow & \langle \text{Uniciteit } \mathsf{lub} \text{ bij def. } \bigvee \text{ en } \bigsqcup \rangle & \bigvee P = \bigsqcup f \end{array}$$

□

Lemma 1.

$$P = \in \mathcal{R}\,(x : \mathcal{D}\,P \mid P\,x)$$

Bewijs. Stel $y : \mathcal{D}\,P$, dan:

$$\begin{array}{llll} y \in \mathcal{R}\,(x : \mathcal{D}\,P \mid P\,x) & \equiv & \langle \text{Def. } \mathcal{R} \rangle & \exists\, x : \mathcal{D}\,P \wedge P\,x\,.\,x = y \\ & \equiv & \langle \text{1-pt regel} \rangle & y \in \mathcal{D}\,P \wedge P\,y \\ & \equiv & \langle y \in \mathcal{D}\,P \text{ ondersteld} \rangle & P\,y \end{array}$$

□

2.2.3.5 Supremumoperator over $\mathbb{R}$

In de volgende hoofdstukken zullen we voornamelijk gebruik maken van de specifieke supremum-operator voor functies met een reële waardeverzameling. We definiëren deze operator als:

Definitie (Supremumoperator over $\mathbb{R}$)**.** $\mathbb{V} = \bigsqcup_{\le}$

Met $\le$ de standaardordening, zoals vermeld in sectie 2.2.1.

2.2.4 De infimumoperatoren

Volledig analoog aan sectie 2.2.3 kunnen we nu de infimumoperator invoeren. We bekomen dan als eerste definitie:

$$\textbf{def } \bigwedge_{-0} : \mathsf{rel}_X \ni \prec \to (\mathsf{pred}_X)_{predhasglb_\prec \,\widehat{\wedge}\, preduniq_\prec} \to X \;\textbf{ with }\; \mathsf{glb}_\prec\,P\,(\bigwedge_\prec P)$$

De definitie voor functies wordt dan:

$$\textbf{def } \bigsqcap_{-0} : \mathsf{rel}_X \ni \prec \to (\mathsf{fam}\,X)_{hasglb_\prec \,\widehat{\wedge}\, uniqglb_\prec} \to X \;\textbf{ with }\; \mathsf{glb}_\prec\,(\in \mathcal{R}\,f)\,(\bigsqcap_\prec f)$$

Waarbij *predhasglb*, *hasglb* en *uniqglb* uiteraard telkens volledig analoog gedefinieerd zijn als in sectie 2.2.3.

Ook hier voegen we de specifieke operator in voor functies met een reële waardeverzameling, namelijk:

Definitie (Infimumoperator over $\mathbb{R}$). $\bigwedge = \sqcap_{\leq}$

Met ook hier $\leq$ de standaardordening, zoals vermeld in sectie 2.2.1.

2.2.5 Eigenschappen supremum- en infimumoperatoren

Wanneer we veronderstellen dat $\preceq$ een partiële ordening is, kunnen we voor de operatoren $\sqcap$ en $\sqcup$ enkele zeer handige eigenschappen aantonen. Voor willekeurige $f : \mathsf{fam}\, X$ en $\sqcup_{\preceq} f \in X$, resp. $\sqcap_{\preceq} f \in X$ geldt dan:

Stelling 4.

$$\forall\, y : X \,.\, \sqcup_{\preceq} f \preceq y \equiv \forall\, d : \mathcal{D}\, f \,.\, f\, d \preceq y$$

en

$$\forall\, y : X \,.\, y \preceq \sqcap_{\preceq} f \equiv \forall\, d : \mathcal{D}\, f \,.\, y \preceq f\, d$$

Bewijs. We tonen dit aan voor $\sqcup_{\preceq}$. Voor $\sqcap_{\preceq}$ verloopt het bewijs analoog. Stellen we $R_f :=\in \mathcal{R}\, f$, dan:

$$\begin{array}{lcl}
 & \langle \text{Def. } \sqcup_{\preceq} \rangle & \mathsf{lub}_{\preceq}\, R_f\, (\sqcup_{\preceq} f) \\
\equiv & \langle \text{Eig. 3 } \mathsf{lub} \rangle & \forall\, (y : X \,.\, \sqcup_{\preceq} f \preceq y \equiv \forall\, z : X_{R_f} \,.\, z \preceq y) \\
\equiv & \langle \text{Def. } R_f \rangle & \forall\, (y : X \,.\, \sqcup_{\preceq} f \preceq y \equiv \forall\, z : X_{\in \mathcal{R}\, f} \,.\, z \preceq y \\
\equiv & \langle z \in X_{R_f} \equiv z \in R_f \text{ weg. } \mathcal{R}\, f \subseteq X \rangle & \forall\, (y : X \,.\, \sqcup_{\preceq} f \preceq y \equiv \forall\, z : \mathcal{R}\, f \,.\, z \preceq y) \\
\equiv & \langle \text{Verband } \mathcal{D}\text{-}\mathcal{R} \rangle & \forall\, (y : X \,.\, \sqcup_{\preceq} f \preceq y \equiv \forall\, d : \mathcal{D}\, f \,.\, f\, d \preceq y
\end{array}$$

$\square$

Het gebruikte verband $\mathcal{D}$-$\mathcal{R}$ is de volgende eigenschap:

$$\forall\, (y : \mathcal{R}\, f \,.\, y \prec x) \equiv \forall\, (d : \mathcal{D}\, f \,.\, f\, d \prec x)$$

Vullen we in deze stelling nu de definitie van $\bigvee$ en $\bigwedge$ in, met $X = [0, 1]$, dan bekomen we:

Stelling 5 (St. $\bigvee$, St. $\bigwedge$ "Stelling $\bigvee$" en "Stelling $\bigwedge$")**.** *Voor* $f : \mathsf{fam}\, X$ *geldt:*

$$\forall\, y : [0,1] \,.\, \bigvee f \leq y \equiv \forall\, x : \mathcal{D}\, f \,.\, f\, x \leq y$$

en

$$\forall\, y : [0,1] \,.\, y \leq \bigwedge f \equiv \forall\, x : \mathcal{D}\, f \,.\, y \leq f\, x$$

We bekomen dan ook een direct afgeleide stelling van deze eigenschap, die we de stelling $\bigvee$ bis en stelling $\bigwedge$ bis zullen dopen:

Stelling 6 (St. $\bigvee$b, St. $\bigwedge$b "Stelling $\bigvee$ bis" en "Stelling $\bigwedge$ bis")**.** *Voor* $f : \mathsf{fam}\, X$ *geldt:*

$$\forall\, x : \mathcal{D}\, f \,.\, f\, x \leq \bigvee f$$

en

$$\forall\, x : \mathcal{D}\, f \,.\, \bigwedge f \leq f\, x$$

Bewijs. We bewijzen het geval voor $\bigwedge$, de formulering met $\bigvee$ wordt volledig analoog bewezen.

$$\begin{array}{lll} 1 & \equiv \quad \langle \text{Refl. } \leq \rangle & \bigwedge f \leq \bigwedge f \\ & \equiv \langle \text{St. } \bigwedge,\ (\bigwedge f) \in [0,1] \rangle & \forall\, x : \mathcal{D}\, f \,.\, \bigwedge f \leq f\, x \end{array}$$

□

Zowel "Stelling $\bigvee$" (resp. "Stelling $\bigwedge$") als "Stelling $\bigvee$ bis" (resp. "Stelling $\bigwedge$ bis") zullen een belangrijke rol spelen in het bewijzen van stellingen omtrent de vaagpredikatenlogica met behulp van ordetheorie.

2.2.6 "Meet" en "Join"

In verscheidene teksten, zoals [Ker06], noteert men het supremum en het infimum van een koppel vaak met $\wedge$ en $\vee$, resp. "meet" en "join" genaamd. In ons formalisme zijn deze operatoren echter reeds gereserveerd voor de binaire conjunctie en disjunctie, daarom zullen we deze operatoren noteren als $\sqcap$, resp. $\sqcup$. De definitie van deze operatoren volgt heel eenvoudig uit onze algemene supremumoperator voor functies en uit het feit dat koppels functies zijn in ons formalisme. Ook hier laten we, wanneer de gebruikte ordening duidelijk is, de parameter van de operatoren weg. De specifieke vorm van deze operatoren voor elementen uit $\mathbb{R}$, met de standaardordening, schrijven we neer als $\wedge$, resp. $\vee$. We vatten deze definities samen in tabel 2.3 (de min- en max-operatoren komen uit [Bou05a, hfdstk. 2].

Naam	Symbool	Type	Definitie
Meet-operator	$\sqcap_{-0}$	$\mathsf{rel}_X \to X \times X \to X$	$x \sqcap_{\preceq} y = \bigsqcap_{\preceq}(x, y)$
Join-operator	$\sqcup_{-0}$	$\mathsf{rel}_X \to X \times X \to X$	$x \sqcup_{\preceq} y = \bigsqcup_{\preceq}(x, y)$
Naam	**Symbool**	**Type**	**Eigenschap**
Max-operator	$\Cup$	$\mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$	$x \Cup y = x \leq y \,?\, y \nmid x$
Min-operator	$\Cap$	$\mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$	$x \Cap y = x \leq y \,?\, x \nmid y$

Tabel 2.3: Meet- en Join-operatoren

2.3 Tralies

Naast de onderverdeling van relaties in partiële ordeningen, totale ordeningen, etc. kunnen we nog verdergaan en speciale soorten partiële ordeningen gaan beschouwen. De specifieke soorten waarin we hier geïnteresseerd zijn, zijn de zogenaamde "tralies", waarbinnen we ook weer tralies kunnen onderscheiden met extra eigenschappen. Om in ons formalisme beter met de traliedefinities te kunnen werken hebben we de verschillende soorten uit [Ker91] geformaliseerd en samengevat in tabel 2.4. Ook hier wijken we af van het gebruikelijke concept om een tralie als een koppel van een verzameling en een orderelatie te zien en beschouwen we enkel de orderelatie zelf. De redenen zijn dezelfde als deze aangehaald in sectie 2.1.

De tabel is gelijkaardig opgebouwd aan tabel 2.1. De verzameling X is een willekeurige verzameling. Verder veronderstellen we dat de relatie $\preceq$ een partiële orderelatie over X is waarmee we alle geparametriseerde predikaten in de tabel parametriseren (dus naast de supremum- en infimumoperatoren, parametriseren we ook lub, glb, etc. met deze orderelatie). De functie $\mathbb{X}$ is de constante $X^\bullet 1$-functie. We voeren deze functie hier in om de definities eleganter te maken. Het type van de predikaten in de tweede kolom is $\mathsf{rel}_X \to \mathbb{B}$, analoog aan tabel 2.1. Wanneer we dit allemaal combineren, betekent dit dat we bijvoorbeeld $\mathsf{Latt}(\preceq) = \forall\, (a, b) : X^2 \,.\, \exists\, (\mathsf{lub}_{\preceq}\, \mathsf{R}_{(a,b)}) \wedge \exists\, (\mathsf{glb}_{\preceq}\, \mathsf{R}_{(a,b)}$ moeten lezen in de eerste rij. Om de lezer beter te gidsen bij deze formele definities, geven we nog wat extra uitleg:

- Tralie: een partiële orderelatie is een tralie wanneer elk koppel uit X een supremum en een infimum heeft. De functie R beeldt elementen af op het feit of ze in de waardeverzameling van de functie in het subscript zitten of niet. De definitie van deze functie is dus:

$$\mathsf{R}_{-0} : \mathsf{fam}\, X \to \mathsf{pred}_X \textbf{ with } \mathsf{R}_f = \in \mathcal{R}\, f$$

- Begrensde tralie: een begrensde tralie is een tralie waarbij de verzameling X waarover de relatie is opgebouwd een grootste en een kleinste element heeft wanneer men de elementen ordent met die orderelatie. Zoals reeds vermeld staat $\mathbb{X}$ voor de constante $X^\bullet 1$ functie, die ongeveer overeenkomt met wat men in sommige andere teksten, zoals [Ker06; Ker91], de "karakteristieke functie" van de verzameling X noemt. We zeggen "ongeveer overeen" omdat het type hier niet universeel is, doordat het predikaat in pred_X moet zitten om gst en lst erop te kunnen toepassen.

- Gecomplementeerde tralie: een gecomplementeerde tralie is een begrensde tralie, waarbij elk element in X een complement heeft. Het complement van een element uit X is een ander element uit X, zodanig dat het beeld van de "meet"-operator, toegepast op deze elementen, het kleinste element van X zal zijn. Analoog beeldt de "join"-operator deze elementen af op het grootste element van X. De functie $\mathbb{X}$ is hier uiteraard dezelfde als deze besproken bij de begrensde tralie.

- Complete tralie: een complete tralie is een tralie waarbij elke niet-ledige deelverzameling van X een supremum en een infimum heeft. De filter met *exst* komt overeen met de niet-ledigheidsvoorwaarde, herinner namelijk dat $\exists P = P \neq X^\bullet 0$ (als $P : \mathsf{pred}_X$), wat overeenkomt met het "leeg" predikaat over X (een predikaat zonder elementen in X die eraan voldoen).

- Distributieve tralie: een distributieve tralie is een tralie waarbij we de "join"-operator kunnen distribueren over de "meet"-operator en vice versa.

- Compleet distributieve tralie: een compleet distributieve tralie is een tralie waarbij we, als we een rijtje hebben van elementen uit X waar we paarsgewijs de "meet"-operator op toepassen, de "join"-operator kunnen distribueren over elk element en vice versa voor het geval met "join" en "meet". De uitdrukking in de tabel is in de puntvrije stijl om elegantieredenen. Als we deze uitdrukking puntsgewijs zouden neerschrijven dan wordt deze $\forall a : X \,.\, \forall s : X^* \,.\, a \sqcup (\bigsqcap i : \mathcal{D}\, s \,.\, s\, i) = \bigsqcap i : \mathcal{D}\, s \,.\, a \sqcup s\, i$, wat een duidelijke overeenkomst toont met de uitdrukking in [Ker91]. We geven een klein voorbeeld van wat deze eigenschap exact betekent in voorbeeld 1.

Voorbeeld 1. *Stel dat we een rijtje hebben van getallen:* $4, 2, 1$, *en een ander getal* 3. *Dan is het rijtje in ons formalisme een functie* s *met als domein de getallen van* 0 *tot* 2, *zodanig dat* $s\,0 = 4$, $s\,2 = 1$, *enzovoort. Wanneer we nu een uitdrukking* $3 \sqcup \bigsqcap(4, 2, 1)$ *hebben (we laten*

Naam	P	Beeld
Tralie	Latt	$\forall\,(a,b):X^2\,.\,\exists\,(\mathsf{lub}\,\mathsf{R}_{(a,b)})\ \wedge\ \exists\,(\mathsf{glb}\,\mathsf{R}_{(a,b)})$
Begrensde tralie	BLatt	$\mathsf{Latt}\,(\preceq)\ \wedge\ \exists\,(\mathsf{gst}\,\mathbb{X})\ \wedge\ \exists\,(\mathsf{lst}\,\mathbb{X})$
Gecomplementeerd	GCLatt	$\mathsf{BLatt}\,(\preceq)\ \wedge\ \forall\,a:X\,.\,\exists\,a':X\,.\,\mathsf{lst}\,\mathbb{X}\,(a\sqcap a')\ \wedge\ \mathsf{gst}\,\mathbb{X}\,(a\sqcup a')$
Compleet	CLatt	$\mathsf{Latt}\,(\preceq)\ \wedge\ \forall\,P:(\mathsf{pred}_X)_\exists\,.\,\exists\,(\mathsf{lub}\,P)\ \wedge\ \exists\,(\mathsf{glb}\,P)$
Distributief	DLatt	$\mathsf{Latt}\,(\preceq)\ \wedge\ \forall\,a,b,c:X^3\,.\,a\ \sqcup\ (b\ \sqcap\ c)=(a\ \sqcup\ b)\ \sqcap\ (a\ \sqcup\ c)$
		$\wedge\ a\ \sqcap\ (b\ \sqcup\ c)=(a\ \sqcap\ b)\ \sqcup\ (a\ \sqcap\ c)$
Compleet distributief	CDLatt	$\mathsf{CLatt}\,(\preceq)\ \wedge\ \forall\,a:X\,.\,\forall\,s:X^*\,.\,a\sqcup(\bigsqcap s)=\bigsqcap(a\ \vec{\sqcup}\ s)$
		$\wedge\ a\sqcap(\bigsqcup s)=\bigsqcup(a\ \vec{\sqcap}\ s)$

Tabel 2.4: Verschillende categorieën van tralies

voor de eenvoud de parametrisatie van de operator even weg), dan zal dit in een distributieve tralie equivalent zijn aan $\bigsqcap(3\sqcup 4, 3\sqcup 2, 3\sqcup 1)$.

In tabel 2.3 vindt men een opsomming van stellingen die in latere hoofdstukken gebruikt zullen worden.

Afkorting	Stelling
GG 1	$x = y \equiv \forall\, z : X\, .\, z \preceq x \equiv z \preceq y$
GG 2	$x = y \equiv \forall\, z : X\, .\, x \preceq z \equiv y \preceq z$
GO 1	$x \preceq y \equiv \forall\, z : X\, .\, z \preceq y \Rightarrow z \preceq y$
GO 2	$x \preceq y \equiv \forall\, z : X\, .\, y \preceq z \Rightarrow x \preceq z$
St. $\bigvee$	$\forall\, f : \mathsf{fam}\,[0,1]\, .\, \forall\, y : [0,1]\, .\, \bigvee f \le y \equiv \forall\, x : \mathcal{D}\, f\, .\, f\, x \le y$
St. $\bigwedge$	$\forall\, f : \mathsf{fam}\,[0,1]\, .\, \forall\, y : [0,1]\, .\, y \le \bigwedge f \equiv \forall\, x : \mathcal{D}\, f\, .\, y \le f\, x$
St. $\bigvee$ b	$\forall\, f : \mathsf{fam}\,[0,1]\, .\, \forall\, x : \mathcal{D}\, f\, .\, f\, x \le \bigvee f$
St. $\bigwedge$ b	$\forall\, f : \mathsf{fam}\,[0,1]\, .\, \forall\, x : \mathcal{D}\, f\, .\, \bigwedge f \le f\, x$

Tabel 2.5: Overzicht van de benodigde stellingen

Hoofdstuk 3

Calculationele vaagpropositielogica

In dit hoofdstuk presenteren we een mogelijke manier om de vaagpropositielogica, zoals uitgewerkt door Petr Hájek in [Háj98] calculationeel om te vormen. We doen dit door te vertrekken van een algebra, en niet door het presenteren van axioma's met inferentieregels, wat de gebruikelijke manier is in logicateksten. De voornaamste reden hiervoor is dat algebraïsche formuleringen eleganter en overzichtelijker zijn, zoals reeds opgemerkt door E.W. Dijkstra [Dij96], en hierdoor een elegantere bewijsvoering toelaten.

Een lezer die vertrouwd is met de literatuur in het domein van de vaagheidsmodellering zal merken dat we, in tegenstelling tot wat gebruikelijk is, infix-operatoren gebruiken in plaats van prefix-operatoren voor de dyadische functies. Dit is geen arbitraire keuze, maar een weloverwogen invoering. Infix-operatoren zijn immers in de eerste plaats duidelijker door een verminderd aantal haakjes (en hoe minder symbolen, hoe meer we de essentie kunnen zien) en in de tweede plaats door de duidelijkere visuele relatie tussen twee argumenten. Bovendien zijn infix-operatoren beter geschikt om het gebruik van regels te gidsen, doordat het patroon van een regel beter zichtbaar is. In die zin past dit dan ook beter in het "ut faciant opus signa" (laat de symbolen het werk doen) paradigma, de essentie van de calculationele stijl. Tot slot zou het schier onmogelijk zijn om een elegante calculationele stijl met de implicatie als verbindingselement op te bouwen als we een prefix-notatie gebruiken, terwijl dit juist zo gerieflijk is om op een algebraïsche manier te rekenen met logica.

Als laatste punt wensen we duidelijk te maken dat de nadruk in dit hoofdstuk (en de volgende) niet ligt op het invoeren van een overvloedig aantal regels, maar op het demonstreren van een opbouw en het praktisch gebruik van een calculationele vaaglogica. De stellingen die we afleiden voor de operatoren, op de stellingen in verband met de axioma's uit [Háj98] na, moeten dan ook voornamelijk beschouwd worden als illustraties van de stijl (maar desalniettemin van meet af aan bruikbare illustraties). Overigens wensen we voor de goede orde op te merken dat, zoals gebruikelijk in de "top-down" benadering van de calculationele stijl, lemma's die gebruikt worden in een bewijs, terug te vinden zijn na de stelling waarvoor het lemma ingevoerd werd. De reden hiervoor is dat een lemma een hulpstelling is, waarvan het belang pas tot uiting komt tijdens het ontwikkelen van het bewijs voor de stelling. De lezer van een bewijs een lemma voor de voeten gooien dat schijnbaar uit de lucht komt gevallen (omdat pas in een verder bewijs duidelijk wordt waarom net dat lemma nodig is) is tegenstrijdig met de werkelijke gang van zaken bij het ontwikkelen van een bewijs en werkt bijgevolg dan ook minder verhelderend.

3.1 Benodigde begrippen

3.1.1 De tralie van de standaardordening

In dit afstudeerwerk zullen wij ons beperken tot het werken met de orderelatie $\leq\, : [0,1]^2 \to [0,1]$, die we de standaardordening hebben genoemd in hoofdstuk 2. Uitbreidingen naar andere tralies vormen een bron voor verder onderzoek. Deze orderelatie is een complete, begrensde (door 0 en 1), distributieve en zelfs compleet-distributieve tralie [Ker91]. De daaruit voortvloeiende eigenschappen zullen handig blijken te zijn in het verdere vervolg van deze tekst. De operatoren die we invoeren zijn allen inwendig op het interval $[0,1]$. Waar nodig voeren we een conventie in voor argumenten die buiten dit interval vallen, om zo uitdrukkingen met nonsens in op te vangen, gelijkaardig aan [Bou05b; Lam02].

Als laatste punt over deze tralie moeten we vermelden dat wanneer we in een bewijs "0 kl. elt." of "1 gr. elt." schrijven, we bedoelen dat 0 het kleinste element is van deze tralie, resp. 1 het grootste.

3.1.2 Triangulaire norm

Definitie (T-norm)**.** *Een triangulaire norm (of kort: t-norm) is een functie met als domein* $[0,1]^2$ *en waardeverzameling* $[0,1]$*, genoteerd als* $\curlywedge$*, die voldoet aan de volgende vier eigenschappen:*

- *Commutativiteit* (Comm. $\curlywedge$)*:* $a \curlywedge b = b \curlywedge a$

- *Associativiteit* (Assoc. $\curlywedge$)*:* $a \curlywedge (b \curlywedge c) = (a \curlywedge b) \curlywedge c$
- *Eenheidselement* (Eenh. $\curlywedge$)*:* 1*:* $a \curlywedge 1 = a$
- *Monotoniciteit* (Mon. $\curlywedge$)*:* $(a \leq b) \wedge (c \leq d) \Rightarrow (a \curlywedge c) \leq (b \curlywedge d)$

We nemen als conventie aan dat deze operator dezelfde precedentie heeft als de scherpe conjunctie. Een volledig overzicht van de precedentieregels is terug te vinden in tabel 3.1, achteraan dit hoofdstuk.

T-normen worden gebruikt om de vaaglogische conjunctie van elementen voor te stellen, zoals “Jan is groot en Piet is klein”, wat we, als p staat voor “Jan is groot” en q staat voor “Piet is klein”, kunnen voorstellen als $p \curlywedge q$. Enkele welbekende (continue) t-normen zijn:

- Lukasiewicz: $x \curlywedge y = 0 \doublevee (x + y - 1)$
- Gödel: $x \curlywedge y = x \doublewedge y$
- Product: $x \curlywedge y = x \cdot y$

Het idee om deze operatoren te gebruiken om de vaaglogische conjunctie voor te stellen volgt uit het feit dat als we hun domein beperken tot de verzameling $\mathbb{B}$, deze operatoren samenvallen met de conjunctie-operator uit de binaire logica.

Een eigenschap van de t-norm die we veelvuldig zullen gebruiken is dat 0 het zero element is:

Stelling 7 (Zero $\curlywedge$ “Zero element van de t-norm”)**.**

$$x \curlywedge 0 = 0$$

Bewijs. Stel $x \in [0, 1]$, dan:

$$\begin{array}{clc}
 & \langle \text{Refl. } \leq, \text{1 gr. elt.} \rangle & 0 \leq 0 \wedge x \leq 1 \\
\Rightarrow & \langle \text{Mon. } \curlywedge \rangle & 0 \curlywedge x \leq 0 \curlywedge 1 \\
\equiv & \langle \text{Eenh. } \curlywedge \rangle & 0 \curlywedge x \leq 0 \\
\equiv & \langle \text{0 kl. elt.} \rangle & 0 \curlywedge x = 0
\end{array}$$

□

Hierbij wensen we op te merken dat we als conventie aannemen dat, in het geval we ergens $0 \curlywedge p$ tegenkomen, met p niet in het interval $[0, 1]$, we stellen dat $0 \curlywedge p = 0$.

Daar we voor de opbouw van onze calculationele stijl een residuum-implicator zullen gebruiken, beperken we ons tot de klasse van de continue t-normen. Waarom we voor de residuum-implicator hebben gekozen (en ons hiervoor moeten beperken tot continue t-normen) bespreken we in de volgende sectie.

3.1.3 Residuum

3.1.3.1 Implicatoren

We hebben verschillende mogelijkheden om de klassieke implicatie uit te breiden naar een vaagimplicatie over $[0, 1]$. De twee bekendste zijn de S-implicatoren, gebaseerd op een expliciete representatie van $p \Rightarrow q$ als $\neg p \vee q$ en de residuum-implicatoren (of R-implicatoren). Voor deze laatste soort kunnen we beschikken over zowel een impliciete definitie (in de vorm van een Galois-connectie) als een expliciete definitie (via het supremum van een welbepaalde uitdrukking). Omdat we in onze calculationele logica de vaagimplicatie als een verbindingselement in bewijzen wensen te gebruiken, moet deze echter transitief zijn. Hierdoor vallen de S-implicatoren al zeker af als mogelijke implicator en zullen we R-implicatoren gebruiken om onze calculationele vaaglogica op te bouwen. Doordat enkel links-continue t-normen echter een residuum hebben, moeten we ons beperken tot deze klasse van t-normen. We zullen ons echter nog meer beperken, namelijk tot de klasse van de continue t-normen. De reden daarvoor ligt in het feit dat we ons baseren op het basiswerk van Hájek [Háj98], waarin een logische structuur wordt opgebouwd voor continue t-normen. We gebruiken het basiswerk van Hájek omdat dit afstudeerwerk een eerste poging wenst te zijn om een calculationele variant op te bouwen en we ons bijgevolg wensen te beperken tot een eenvoudige, maar welbekende logische formulering van vaaglogische begrippen. Een eventuele uitbreiding naar andere structuren, bv. structuren die een logica opgebouwd aan de hand van links-continue t-normen beschrijven, is dan ook een mogelijke richting voor verder onderzoek, maar overschrijdt aanzienlijk het bestek van dit afstudeerwerk.

3.1.3.2 Operatoren via ongelijkheden

We zullen hier een andere zienswijze gebruiken om het residuum in te voeren dan deze gebruikt in andere teksten[1], zoals [Háj98; Str05]. De eerste tekst geeft een mondelinge verklaring voor de impliciete definitie die we verderop zullen introduceren. De tweede tekst verklaart de definitie van het residuum door de equivalentie die in de klassieke logica bestaat tussen $\neg\, a \,\vee\, b$ en $\Vvee\,(c\!:\!\mathbb{B}\,|\,a \,\wedge\, c \leq b)$ die men later veralgemeent tot $\Vvee\,(c\!:\![0,1]\,|\,a \curlywedge c \leq b)$. De gebruikte aanpak hier bestaat erin de operator te definiëren aan de hand van een ongelijkheid. Het idee komt voort uit de beschouwing dat we soms een operator wensen in te voeren aan de hand van specificaties waaraan de operator moet voldoen. Dergelijke specificaties vormen een impliciete definitie voor de operator als we voor elke waarde uit het domein een unieke operatorwaarde kunnen afleiden aan de hand van die specificaties. Dit in tegenstelling tot een expliciete definitie van de vorm "operator(x) = uitdrukking" waarvoor we onmiddellijk een waarde bekomen als we de uitdrukking voor een bepaalde x uitrekenen. De methode die we hier zullen presenteren is bruikbaar wanneer er reeds een specificatie in de vorm van een ongelijkheid met de nieuwe operator en oude operatoren vastgelegd werd. Om dit alles duidelijker te maken, geven we eerst een voorbeeld uit de elementaire algebra, zoals onderwezen in het secundair onderwijs, en passen we vervolgens de methode toe om de vaagimplicatie in te voeren.

Analogie met ongelijkheden uit de elementaire algebra Stel dat we een gelijkheid hebben over de reële getallen van de vorm $Q(x, y, z)$, bijvoorbeeld $Q(x, y, z) \equiv 4\cdot x - 6\cdot y - 2\cdot z = 0$, met $+$ en $-$ als eerder ingevoerde operatoren.

Neem vervolgens aan dat we een operator φ wensen in te voeren zodat $Q(x, y, \varphi(x, y)) \equiv 1$ voor elke x en y uit het domein van Q. Dan is deze gelijkheid een specificatie voor onze operator via een impliciete definitie. Traditioneel kunnen we bij een dergelijke specificatie een expliciete uitdrukking voor φ bekomen door deze te isoleren in het linker- of rechterlid van de vergelijking. In het voorbeeld bekomen we dan: $\varphi(x, y) = 2\cdot x - 3\cdot y$, wat een unieke en bestaande oplossing is voor $\varphi(x, y)$

Deze methode werkt voor gelijkheden, maar bij ongelijkheden, zoals bv. $Q(x, y, z) \equiv 0 \leq 4\cdot x - 6\cdot y - 2\cdot z$ geeft het isoleren van $\varphi(x, y)$ geen expliciete definitie. Het beste dat we kunnen bekomen is een uitdrukking van de vorm $\varphi(x, y) \leq 2\cdot x - 3\cdot y$ (met $\varphi(x, y)$ gesubstitueerd voor z zoals hierboven). Zo'n uitdrukking definieert φ niet, daar er voor willekeurige x en y

[1] Met dank aan prof. Boute voor dit idee en een eerste uitwerking

verscheidene waarden mogelijk zijn voor $\varphi(x, y)$ die aan deze ongelijkheid voldoen, bijvoorbeeld $\varphi(x, y) = 2 \cdot x - 3 \cdot y$, $\varphi(x, y) = 2 \cdot x - 3 \cdot y - 1$,... . Een ongelijkheid induceert met andere woorden een verzameling van mogelijke waarden voor $\varphi(x, y)$, in plaats van één unieke waarde.

Omdat we een welgedefinieerde operator wensen (dit is een operator die voor elk element uit zijn domein een bestaande waarde heeft die uniek is voor het gegeven element), moeten we dit uniciteitsprobleem oplossen. Een mogelijke oplossing is om φ gelijk te stellen aan ofwel het kleinste, ofwel het grootste element van de elementen die aan de ongelijkheid $Q(x, y, z)$ voldoen. Door de uniciteit van deze twee elementen bij de partiële orderelatie $\leq$ (deze is immers antisymmetrisch, wat een uniek grootste en kleinste element teweegbrengt, zoals vermeld in hoofdstuk 2) volgt dan immers de uniciteit van de nieuwe operator. Men zou kunnen suggereren om het supremum of het infimum van een dergelijke ongelijkheid te gebruiken, maar dat komt niet overeen met wat we wensen. We hebben immers vooropgesteld dat we wensen dat de operator voldoet aan $Q(x, y, \varphi(x, y)) \equiv 1$ en deze eigenschap is wegens de definitie van het grootste en het kleinste element van het predikaat $Q(x, y, z)$ voldaan als we één van beide gelijkstellen aan $\varphi(x, y)$. Voor het supremum of het infimum geldt deze eigenschap echter niet zomaar.

In het voorbeeld bekomen we dan dat we $\varphi(x, y)$ kunnen definiëren als ofwel het grootste ofwel het kleinste element van de elementen die aan de ongelijkheid $z \leq 2 \cdot x - 3 \cdot y$ voldoen. In ons voorbeeld hebben deze elementen echter geen kleinste element; $\mathbb{R}$ is immers een oneindig grote verzameling en elke z uit $\mathbb{R}$ kleiner dan $2 \cdot x - 3 \cdot y$ zal eraan voldoen, waardoor er voor elk element dat aan de ongelijkheid voldoet er wel weer een kleiner element zal bestaan dat eraan voldoet. Daarom moeten we $\varphi(x, y)$ wel definiëren als de functie die elke x en y afbeeldt op de grootste z uit $\mathbb{R}$ die aan $Q(x, y, z)$ voldoet. In de meeste gevallen blijkt het overigens zo te zijn dat de keuze voor het grootste of het kleinste element éénduidig bepaald is door het triviaal of onbestaand zijn van één van deze elementen.

We moeten nu nog aantonen dat deze operator tevens voor elke x,y uit het domein van φ (het domein van de operator) bestaand is. In het algemeen is het bestaan van een grootste of een kleinste element immers niet gegarandeerd bij een partiële orderelatie, waardoor we niet zomaar kunnen stellen dat een operator $\varphi(x, y)$, opgebouwd met deze methode, zeker zal bestaan voor elk element uit zijn domein. Voor bepaalde ongelijkheden kunnen we echter wel het bestaan aantonen. In het voorbeeld lukt dit door op te merken dat de definitie van $\varphi(x, y)$ als grootste element hetzelfde is als $\varphi(x, y)$ gelijk te stellen aan $2 \cdot x - 3 \cdot y$. Dit is het rechterlid van de ongelijkheid $Q(x, y, \varphi(x, y))$ als we $\varphi(x, y)$ isoleren in het linkerlid. Immers, laten we voor willekeurige x en y in $\mathbb{R}$ stellen dat $\lambda := 2 \cdot x - 3 \cdot y$ en dat $P\,z := Q(x, y, z)$, zodat $P\,x \equiv z \leq \lambda$, dan geldt:

Bewijs.

$$\begin{array}{rcll}
\mathsf{gst}\,P\,\lambda & \equiv & \langle \text{Def. } \mathsf{gst} \rangle & P\,\lambda \wedge \mathsf{ub}\,P\,\lambda \\
& \equiv & \langle \text{Def. } \mathsf{ub} \rangle & P\,\lambda \wedge \forall\, z \,{:}\, \mathbb{R} \,.\, P\,z \Rightarrow z \leq \lambda \\
& \equiv & \langle P\,z \equiv z \leq \lambda \rangle & \lambda \leq \lambda \wedge \forall\, z \,{:}\, \mathbb{R} \,.\, z \leq \lambda \Rightarrow z \leq \lambda \\
& \equiv & \langle \text{Refl. } \leq, \text{R}{\Rightarrow} \rangle & 1 \wedge \forall\, z \,{:}\, \mathbb{R} \,.\, 1 \\
& \equiv & \langle \forall\,(X^{\bullet}\,1) \equiv 1 \rangle & 1 \wedge 1 \\
& \equiv & \langle 1 \wedge 1 \equiv 1 \rangle & 1
\end{array}$$

□

Doordat de uitdrukking $2 \cdot x - 3 \cdot y$ voor elke x en y in $\mathbb{R}$ een waarde heeft, heeft onze operator, gedefinieerd door $\varphi(x, y) = 2 \cdot x - \cdot y$, bijgevolg eveneens een waarde voor elke x en y in $\mathbb{R}$.

De methode hierboven beschreven om het bestaan van een grootste of kleinste element te garanderen geldt niet in het algemeen voor elke operator die we via een ongelijkheid wensen in te voeren. Wel kunnen we algemeen stellen dat deze methode werkt voor elke ongelijkheid waarbij we de variabele naar waar we de ongelijkheid oplossen kunnen isoleren en waarbij we een reflexieve ordening hebben. We kunnen dan immers volledig analoog aantonen dat het grootste of het kleinste element nemen equivalent is met het gelijkstellen van de operator aan het andere lid van de ongelijkheid. We zijn nu klaar om dit alles toe te passen op het invoeren van onze vaagimplicatie aan de hand van het residuum.

De vaagimplicatie We wensen nu het voorgaande toe te passen om een nieuwe dyadische operator in onze vaaglogica in te voeren, aan de hand van de operatoren die we reeds hebben (in casu de t-norm). We zullen deze functie noteren als een infix-operator $\rightsquigarrow$ van het type $[0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$. De ongelijkheid waaraan we wensen dat deze operator voldoet is de vaagmodusponens, gegeven door $x \curlywedge (x \rightsquigarrow y) \leq y$. Dit is dus een specificatie die we opleggen aan de operator. We leggen eerst kort uit waarom we net deze uitdrukking als de vaagmodusponens kiezen.

Voor de scherpe $\wedge$-operator hebben we de stelling $p \wedge (p \Rightarrow q) \Rightarrow q$, die we modus ponens noemen. Als we in deze stelling opmerken dat $(\Rightarrow) \; = \leq\rceil\mathbb{B}$, dan kunnen we dit schrijven als

$p \wedge (p \Rightarrow q) \leq q$. Door het vervagen van deze uitdrukking bekomen we een uitbreiding die we de vaagmodusponens zullen noemen: $p \curlywedge (p \rightsquigarrow q) \leq q$.

Uit het voorgaande weten we reeds dat we een unieke operator kunnen bekomen door het kleinste of het grootste element van de oplossingenverzameling van de ongelijkheid te kiezen als waarde voor de operator. We weten eveneens dat er vaak een triviale oplossing bestaat. Stellen we $Q(x, y, z) := x \curlywedge z \leq y$, wat onze ongelijkheid voorstelt, en stellen we nu, analoog aan het voorgaande voorbeeld uit de getallenleer, $P\,z := x \curlywedge z \leq y$, met willekeurige x en y uit $[0, 1]$, dan zal de triviale oplossing het kleinste element van het predikaat P zijn. Voor willekeurige x en y uit $[0, 1]$ geldt immers:

Bewijs.

$$
\begin{array}{rcll}
\mathsf{lst}\,P\,0 & \equiv & \langle \text{Def. } \mathsf{lst} \rangle & P\,0 \wedge \mathsf{lb}\;P\,0 \\
& \equiv & \langle \text{Def. } \mathsf{lb} \rangle & P\,0 \wedge \forall\, v : [0,1] \,.\, P\,v \Rightarrow 0 \leq v \\
& \equiv & \langle 0 \text{ kl. elt.} \rangle & P\,0 \wedge \forall\, v : [0,1] \,.\, P\,v \Rightarrow 1 \\
& \equiv & \langle x \Rightarrow 1 \equiv 1 \rangle & P\,0 \wedge \forall\, v : [0,1] \,.\, 1 \\
& \equiv & \langle \forall\, (X^{\bullet}\, 1) \equiv 1 \rangle & P\,0 \wedge 1 \\
& \equiv & \langle \text{Def. } P \rangle & (x \curlywedge 0 \leq y) \wedge 1 \\
& \equiv & \langle \text{Zero } \curlywedge \rangle & (0 \leq y) \wedge 1 \\
& \equiv & \langle 0 \text{ kl. elt.} \rangle & 1 \wedge 1 \\
& \equiv & \langle 1 \wedge 1 \equiv 1 \rangle & 1
\end{array}
$$

$\square$

Bijgevolg zullen we onze operator $\rightsquigarrow$ voor willekeurige x en y in $\mathbb{R}$ definiëren als het grootste element van het predikaat P, zoals hiervoor gedefinieerd. Dat onze operator een unieke waarde zal aannemen voor elke x en y uit $[0, 1]$ volgt nu uit het feit dat $\leq$ een antisymmetrische orderelatie is, wat tot een uniek grootste en kleinste element leidt. Het bestaan van het grootste en het kleinste element van een predikaat is echter niet gegarandeerd voor elk predikaat over $[0, 1]$, Dit aantonen is dus nog de laatste stap die we moeten zetten om een goed gedefinieerde operator te bekomen.

De methode die we gebruikten in het voorbeeld uit de elementaire algebra kunnen we jammer genoeg niet toepassen op onze nieuwe operator. We kunnen namelijk in onze ongelijkheid $Q(x, y, z)$, met x en y willekeurig uit $[0, 1]$, niet de variabele z isoleren. Immers, stellen we

$(x \curlywedge) := f$, dan zouden we volgende stappen moeten ondernemen om z te kunnen isoleren:

$$\begin{aligned} f(z) \le y \quad & \equiv \quad \langle \text{Leibniz} \rangle \quad f^-(f(z)) \le f^-(y) \\ & \equiv \langle f^- \circ f = \mathsf{id} \rangle \;\; z \le f^-(y) \end{aligned}$$

Onze $(x \curlywedge)$ is in het algemeen echter geen bijectie (beschouw bijvoorbeeld $(0 \curlywedge) = [0,1]^\bullet 0$, wat duidelijk noch een injectie, noch een surjectie is), waardoor we niet voor alle elementen in het domein van de t-norm een niet-triviale inverse functie (zoals de lege functie) kunnen creëren. Daarom zullen we een andere manier moeten vinden om het bestaan van onze operator te garanderen dan deze gebruikt in het voorbeeld uit de getallenleer.

De oplossing bestaat erin om op te merken dat $\le\rceil [0,1]$ een complete tralie is. We weten dan immers dat elk niet-ledig predikaat over $[0,1]$ een supremum en een infimum heeft. Wanneer we nu kunnen aantonen dat voor ons predikaat P het supremum samenvalt met het grootste element van dit predikaat, hebben we zowel de bestaandheid (wegens de compleetheid van de tralie en het bestaan van het supremum voor elk predikaat in zo'n tralie) als de uniciteit van onze operator (wegens de uniciteit van het grootste element bij een anti-symmetrische ordening) aangetoond. Dat voor ons predikaat deze eigenschap inderdaad geldt, kunnen we als volgt inzien:

Bewijs.

$$\begin{array}{lcll} \mathsf{gst}\, P\,(\bigvee P) & \equiv & \langle \text{Def. } \mathsf{gst} \rangle & P\,(\bigvee P) \wedge \mathsf{ub}\; P\,(\bigvee P) \\ & \equiv & \langle \mathsf{ub}\; P\,(\bigvee P) \text{ bij def.} \rangle & P\,(\bigvee P) \wedge 1 \\ & \equiv & \langle x \wedge 1 \equiv x \rangle & P\,(\bigvee P) \\ & \equiv & \langle \text{Def. } P \rangle & x \curlywedge (\bigvee P) \le y \\ & \equiv & \langle \bigvee P = \curlyvee z : \mathcal{D}\,P \,|\, P\,z \rangle & x \curlywedge \curlyvee (z : [0,1] \,|\, P\,z) \le y \\ & \equiv & \langle \curlywedge \text{ commuteert met } \curlyvee \rangle & \curlyvee (x \curlywedge z \,|\, z : [0,1] \wedge P) \le y \\ & \equiv & \langle \text{Lemma, Def. } \curlyvee \rangle & 1 \end{array}$$

$\square$

De gebruikte commuterings-eigenschap volgt uit de continuïteit en het stijgend zijn van onze t-norm en is terug te vinden in [Sto81]. Het gebruikte lemma is $\mathsf{ub}\; (\in \mathcal{R}\,(x \curlywedge z \,|\, z : [0,1] \wedge P))\, y$, te bewijzen door:

Bewijs. Stel $f := x \curlywedge z \,|\, z : [0,1] \wedge P$, dan geldt voor willekeurige x en y in $\mathbb{R}$ (herinner dat

$P\,z = x \curlywedge z \leq y$, vandaar deze variabelen):

$$
\begin{array}{cll}
 & \mathsf{ub}\,(\in \mathcal{R}\,f)\,y & \\
\equiv & \langle \text{Def. } \mathsf{ub} \rangle & \forall\, u : [0,1] \,.\, u \in \mathcal{R}\,f \Rightarrow u \leq y \\
\equiv & \langle \text{Def. } \mathcal{R} \rangle & \forall\, u : [0,1] \,.\, \exists\,(z : [0,1] \wedge x \curlywedge z \leq y \,.\, x \curlywedge z = u) \Rightarrow u \leq y \\
\equiv & \langle \text{LSD}\,\forall / \Rightarrow \rangle & \forall\, u : [0,1] \,.\, \forall\, z : [0,1] \wedge x \curlywedge z \leq y \,.\, x \curlywedge z = u \Rightarrow u \leq y \\
\equiv & \langle \text{Leibniz} \rangle & \forall\, u : [0,1] \,.\, \forall\, z : [0,1] \wedge x \curlywedge z \leq y \,.\, x \curlywedge z = u \Rightarrow x \curlywedge z \leq y \\
\equiv & \langle \text{Trading } \forall \rangle & \forall\, u : [0,1] \,.\, \forall\, z : [0,1] \,.\, x \curlywedge z \leq y \Rightarrow x \curlywedge z = u \Rightarrow x \curlywedge z \leq y \\
\equiv & \langle \text{W}\Rightarrow \rangle & \forall\, u : [0,1] \,.\, \forall\, z : [0,1] \,.\, 1 \\
\equiv & \langle \forall\,(X^{\bullet}\,1) \equiv 1 \rangle & 1
\end{array}
$$

□

Samen met de definitie van $\curlyvee$, die zegt dat $\mathsf{ub}\,(\in \mathcal{R}\,f)\,v \Rightarrow \curlyvee f \leq v$, voor willekeurige f in het domein van $\curlyvee$, is het voorgaande dus bewezen.

We kunnen nu de expliciete definitie voor onze vaagimplicatie neerschrijven:

Definitie (Directe definitie vaagimplicatie)**.**

$$\textbf{def} \;\rightsquigarrow\; : [0,1] \times [0,1] \rightarrow [0,1] \;\; \textbf{with} \;\; x \rightsquigarrow y = \curlyvee\, z : [0,1] \,|\, x \curlywedge z \leq y$$

Uit de definitie van het grootste element kunnen we nu nog een extra impliciete definitie vinden voor onze operator. Er geldt immers voor $P\,z := x \curlywedge z \leq y$ en $\lambda \in Z$ zodat $\mathsf{gst}\,P\,\lambda \equiv 1$ dat:

Bewijs.

$$
\begin{array}{ccll}
\mathsf{gst}\,P\,z & \equiv & \langle \text{Def. } \mathsf{gst} \rangle & P\,\lambda \wedge \mathsf{ub}\,P\,\lambda \\
 & \equiv & \langle \text{Antiton. } P,\ x \wedge 1 \equiv x \rangle & P\,\lambda \wedge \mathsf{ub}\,P\,\lambda \wedge \forall\, z : [0,1] \,.\, z \leq \lambda \Rightarrow P\,\lambda \Rightarrow P\,z \\
 & \equiv & \langle \text{SH}\Rightarrow \rangle & P\,\lambda \wedge \mathsf{ub}\,P\,\lambda \wedge \forall\, z : [0,1] \,.\, P\,\lambda \Rightarrow z \leq \lambda \Rightarrow P\,z \\
 & \Rightarrow & \langle \text{MP} \rangle & \mathsf{ub}\,P\,\lambda \wedge \forall\, z : [0,1] \,.\, P\,z \Rightarrow z \leq \lambda \\
 & \equiv & \langle \text{Def. } \mathsf{ub} \rangle & \forall\, z : [0,1] \,.\, z \leq \lambda \Rightarrow P\,z \wedge \forall\, z : [0,1] \,.\, P\,z \Rightarrow z \leq \lambda \\
 & \equiv & \langle p \Rightarrow q \wedge q \Rightarrow p \equiv p \equiv q \rangle & \forall\, z : [0,1] \,.\, (P\,z \equiv z \leq \lambda)
\end{array}
$$

□

De Antitoniciteits eigenschap van P die gebruikt werd in het vorige bewijs is:

$$\forall\, z, z' : [0,1]^2 \,.\, z \leq z' \Rightarrow P\,z' \Rightarrow P\,z$$

en wordt als volgt bewezen:

Bewijs. Voor willekeurige $z, z' : [0,1]^2$ geldt:

$$\begin{aligned} z \le z' \quad &\Rightarrow \langle \text{Mon. } \curlywedge \rangle \;\; x \curlywedge z \le x \curlywedge z' \\ &\Rightarrow \langle \text{Trans. } \le \rangle \;\; (x \curlywedge z' \le y) \Rightarrow (x \curlywedge z \le y) \end{aligned}$$

$\square$

Vullen we nu P en $\lambda = x \rightsquigarrow y$ in, in de uitdrukking op het einde van het vorige bewijs, dan bekomen we volgende eigenschap, die we als impliciete definitie zullen kiezen. Deze eigenschap stemt overeen met de algemene vorm $f\,z \sqsubseteq y \equiv z \preceq g\,y$, die een Galois-connectie wordt genoemd [Bac02; BB; Oli05].

Stelling 8 (Impliciete definitie vaagimplicatie ("Galois-connectie", GC))**.**

$$\forall\, z : [0,1]\,.\,(x \curlywedge z \le y \equiv z \le x \rightsquigarrow y)$$

We nemen als conventie aan dat de vaagimplicatie een gelijke precedentie heeft als de scherpe implicatie. Dit betekent onder andere dat deze minder sterk bindt dan de t-norm, maar sterker dan het ongelijkheidsteken "$\le$" en het gelijkheidsteken "$=$". Een tweede conventie die we aannemen is dat de vaagimplicatie rechts-associatief is. Dit betekent dat we $x \rightsquigarrow y \rightsquigarrow z$ moeten lezen als $x \rightsquigarrow (y \rightsquigarrow z)$.

3.1.4 Eigenschappen

Uit de definitie van het residuum volgen enkele onmiddellijke eigenschappen, die we hieronder verder behandelen. Een eerste eigenschap dient om ons schrijfwerk te besparen wanneer we de Galois-connectie gebruiken om zaken om te wisselen:

Stelling 9 (SH$\le/\rightsquigarrow$ "Shunting met $\le$ en $\rightsquigarrow$")**.**

$$x \le y \rightsquigarrow z \equiv y \le x \rightsquigarrow z$$

Bewijs.

$$\begin{aligned} x \le y \rightsquigarrow z \quad &\equiv \quad \langle \text{GC} \rangle \quad x \curlywedge y \le z \\ &\equiv \langle \text{Comm. } \curlywedge \rangle \;\; y \curlywedge x \le z \\ &\equiv \quad \langle \text{GC} \rangle \quad y \le x \rightsquigarrow z \end{aligned}$$

$\square$

Dan hebben we een verband tussen de ongelijkheid $\leq$ en de vaagimplicatie $\leadsto$, dat zeer handig blijkt te zijn bij het bewijzen van vele verdere eigenschappen:

Stelling 10 (Eq. $\leq/\leadsto$ "Equivalentiestelling leq en $\leadsto$").

$$x \leq y \equiv (x \leadsto y) = 1$$

Bewijs.

$$\begin{array}{rclr} 1 = (x \leadsto y) & \equiv & \langle x \leadsto y \in [0,1],\ 1 \text{ gr. elt.}\rangle & 1 \leq (x \leadsto y) \\ & \equiv & \langle \text{GC} \rangle & 1 \curlywedge x \leq y \\ & \equiv & \langle 1 \curlywedge x = x \rangle & x \leq y \end{array}$$

□

Merk op dat deze stelling tot gevolg heeft dat, wanneer we $p \leadsto q = 1$ wensen te bewijzen, het voldoende is $p \leq q$ te bewijzen (en omgekeerd wegens de equivalentie). Een eerste toepassing van deze eigenschap is het bewijzen van de vaagmodusponens, die de specificatie leverde waarrond we onze vaagimplicatie hebben geconstrueerd.

Stelling 11 (FMP "Vaagmodusponens").

$$x \curlywedge (x \leadsto y) \leadsto y = 1$$

Bewijs. Dit volgt gemakkelijk uit de Galois-connectie die bestaat tussen de t-norm en zijn residuum:

$$\begin{array}{rcll} 1 & \equiv & \langle \text{Refl. } \leq \rangle & x \leadsto y \leq x \leadsto y \\ & \equiv & \langle \text{GC} \rangle & x \curlywedge (x \leadsto y) \leq y \\ & \equiv & \langle \text{Eq. } \leq/\leadsto \rangle & x \curlywedge (x \leadsto y) \leadsto y = 1 \end{array}$$

□

Met behulp van de vaagmodusponens kunnen we nu heel eenvoudig twee monotoniciteitseigenschappen van deze vaagimplicatie bewijzen. Eerst het stijgend zijn in het tweede lid:

Stelling 12 (Mon. Cons. $\leadsto$ "Monotoniciteit in het consequent van $\leadsto$").

$$(b \leq c) \Rightarrow (a \leadsto b \leq a \leadsto c)$$

Bewijs.

$$\begin{array}{llll} b \le c & \Rightarrow & \langle \text{FMP, Mon. } \curlywedge \rangle & a \curlywedge (a \rightsquigarrow b) \le c \\ & \equiv & \langle \text{GC} \rangle & a \rightsquigarrow b \le a \rightsquigarrow c \end{array}$$

□

Vervolgens tonen we aan dat het residuum dalend is in zijn eerste lid:

Stelling 13 (Antiton. Antec. $\rightsquigarrow$ "Antitoniciteit in het antecedent van $\rightsquigarrow$")**.**

$$(c \le d) \Rightarrow (d \rightsquigarrow a \le c \rightsquigarrow a)$$

Bewijs.

$$\begin{array}{llll} c \le d & \Rightarrow & \langle \text{Mon. } \curlywedge \rangle & c \curlywedge (d \rightsquigarrow a) \le d \curlywedge (d \rightsquigarrow a) \\ & \Rightarrow & \langle \text{FMP, Mon. } \le \rangle & c \curlywedge (d \rightsquigarrow a) \le a \\ & \equiv & \langle \text{GC} \rangle & d \rightsquigarrow a \le c \rightsquigarrow a \end{array}$$

□

De volgende stelling zegt ons iets over het gedrag van de residuum-implicator in de buurt van het grootste element van de tralie $[0,1]\rceil \le)$:

Stelling 14 (Eenh. $\rightsquigarrow$ "Eenheidselement van $\rightsquigarrow$")**.**

$$(1 \rightsquigarrow x) = x$$

Bewijs.

$$\begin{array}{llll} (1 \rightsquigarrow x) = x & \equiv & \langle \text{Antisymm } \le \rangle & (x \le 1 \rightsquigarrow x) \wedge (1 \rightsquigarrow x \le x) \\ & \equiv & \langle \text{GC} \rangle & (x \curlywedge 1 \le x) \ \wedge \ (1 \rightsquigarrow x \le x) \\ & \equiv & \langle \text{Eenh. } \curlywedge \rangle & (x \le x) \ \wedge \ (1 \rightsquigarrow x \le x) \\ & \equiv & \langle \text{Eenh. } \wedge \text{, Eenh. } \curlywedge \rangle & 1 \curlywedge (1 \rightsquigarrow x) \le x \\ & \equiv & \langle \text{GC} \rangle & (1 \rightsquigarrow x) \le (1 \rightsquigarrow x) \\ & \equiv & \langle \text{Refl. } \le \rangle & 1 \end{array}$$

□

Dan hebben we nog een laatste stelling nodig omtrent de vaagimplicatie die ons zegt wat er gebeurt met de vaagmodusponens wanneer het antecedent van de vaagimplicatie groter is dan het consequent:

Stelling 15. $y \leq x \Rightarrow x \curlywedge (x \rightsquigarrow y) = y$

Bewijs. Voor willekeurige x en y in $[0,1]$ berekenen we, vertrekkend van (GC):

$$
\begin{array}{cll}
 & \multicolumn{2}{l}{\forall\, z : [0,1] \,.\, x \curlywedge z \leq y \equiv z \leq x \rightsquigarrow y} \\
\Rightarrow & \langle \text{W}\equiv \rangle & \forall\, z : [0,1] \,.\, (x \curlywedge z \leq y) \Rightarrow (z \leq x \rightsquigarrow y) \\
\Rightarrow & \langle \text{Mon. } \curlywedge \rangle & \forall\, z : [0,1] \,.\, (x \curlywedge z \leq y) \Rightarrow (x \curlywedge z \leq x \curlywedge (x \rightsquigarrow y)) \\
\Rightarrow & \langle \text{Eig. } \leq \rangle & \forall\, z : [0,1] \,.\, (x \curlywedge z = y) \vee (x \curlywedge z < y) \Rightarrow (x \curlywedge z \leq x \curlywedge (x \rightsquigarrow y)) \\
\Rightarrow & \langle \text{T}\Rightarrow\text{,W}\vee \rangle & \forall\, z : [0,1] \,.\, (x \curlywedge z = y) \Rightarrow (x \curlywedge z \leq x \curlywedge (x \rightsquigarrow y)) \\
\equiv & \langle \text{Leibniz} \rangle & \forall\, z : [0,1] \,.\, (x \curlywedge z = y) \Rightarrow (y \leq x \curlywedge (x \rightsquigarrow y)) \\
\Rightarrow & \langle \text{RDist. } \Rightarrow/\exists \rangle & \exists\, (z : [0,1] \,.\, x \curlywedge z = y) \Rightarrow (y \leq x \curlywedge (x \rightsquigarrow y)) \\
\Rightarrow & \langle \text{Lemma 2} \rangle & (y \leq x) \Rightarrow (y \leq x \curlywedge (x \rightsquigarrow y)) \\
\equiv & \langle \text{FMP} \rangle & (y \leq x) \Rightarrow (y \leq x \curlywedge (x \rightsquigarrow y)) \wedge (x \curlywedge (x \rightsquigarrow y) \rightsquigarrow y = 1) \\
\equiv & \langle \text{Eq. } \leq/\rightsquigarrow \rangle & (y \leq x) \Rightarrow (y \leq x \curlywedge (x \rightsquigarrow y)) \wedge (x \curlywedge (x \rightsquigarrow y) \leq y) \\
\equiv & \langle \text{Antisymm. } \leq \rangle & (y \leq x) \Rightarrow (y \leq x) \Rightarrow (x \curlywedge (x \rightsquigarrow y) = y)
\end{array}
$$

De eigenschap "RDist. $\Rightarrow/\exists$" is: $\exists\, P \Rightarrow q \equiv \forall\, (P \overset{\leftarrow}{\Rightarrow} q)$. De eigenschap T$\Rightarrow$ is de transitiviteit van de implicatie: $(x \Rightarrow y) \Rightarrow (y \Rightarrow z) \Rightarrow (x \Rightarrow z)$ en W$\vee$ is de afzwakkingseigenschap van de disjunctie: $x \Rightarrow x \vee y$. □

Het gebruikte lemma luidt:

Lemma 2. $y \leq x \Rightarrow \exists\, z : [0,1] \,.\, x \curlywedge z = y$

Bewijs.

$$
\begin{array}{lcl}
y \leq x & \Rightarrow \quad \langle y \in [0,1] \rangle & y \in [0,x] \\
 & \equiv \langle \text{Cont.}\curlywedge\text{, Mon.}\curlywedge\text{,} x \curlywedge 1 = x \rangle & \exists z : [0,1] \,.\, x \curlywedge z = y
\end{array}
$$

□

Met de verantwoording Cont.$\curlywedge$,Mon.$\curlywedge$,$x \curlywedge 1 = x$ bedoelen we dat, wegens het stijgend zijn van de t-norm, het feit dat $x \curlywedge 1 = 1$ en de continuïteit van de t-norm het bereik van $x \curlywedge$ het interval $[0, x]$ is.

In wat volgt zullen we ons toespitsen op enkele stellingen die benodigd zijn om de residuum-implicator te kunnen gebruiken als verbindingsteken in bewijzen, zoals we dit gewend zijn van de klassieke implicatie bij de verscheidene calculationele uitwerkingen van de klassieke logica.

3.2 Enkele calculationele basisregels

Eén van de belangrijkste voorwaarden om een operator als schakel in een calculationele afleiding te kunnen gebruiken is de transitiviteit. We bewijzen nu dat het residuum hieraan voldoet.

Stelling 16 (T$\rightsquigarrow$ "Transitiviteit van de R-implicatie")**.**

$$(x \rightsquigarrow y) \rightsquigarrow (y \rightsquigarrow z) \rightsquigarrow (x \rightsquigarrow z) = 1$$

Bewijs.

$$\begin{array}{llc l}
 & \langle \text{FMP} \rangle & & x \curlywedge (x \rightsquigarrow y) \rightsquigarrow y = 1 \\
 & \langle \text{Eq. } \leq/\rightsquigarrow \rangle & & x \curlywedge (x \rightsquigarrow y) \leq y \\
\Rightarrow & \langle \text{Mon. } \curlywedge \rangle & & x \curlywedge (x \rightsquigarrow y) \curlywedge (y \rightsquigarrow z) \leq y \curlywedge (y \rightsquigarrow z) \\
\Rightarrow & \langle \text{FMP, Trans.} \leq \rangle & & x \curlywedge (x \rightsquigarrow y) \curlywedge (y \rightsquigarrow z) \leq z \\
\equiv & \langle \text{GC} \rangle & & (x \rightsquigarrow y) \curlywedge (y \rightsquigarrow z) \leq (x \rightsquigarrow z) \\
\equiv & \langle \text{GC} \rangle & & (x \rightsquigarrow y) \leq (y \rightsquigarrow z) \rightsquigarrow (x \rightsquigarrow z) \\
\equiv & \langle \text{Eq. } \leq/\rightsquigarrow \rangle & & (x \rightsquigarrow y) \rightsquigarrow (y \rightsquigarrow z) \rightsquigarrow (x \rightsquigarrow z) = 1
\end{array}$$

□

Het gevolg van deze stelling is dat we transitiviteit kunnen gebruiken in een bewijs van de vorm

$$\begin{array}{ll} p & \rightsquigarrow \langle p \rightsquigarrow q \rangle \; q \\ & \rightsquigarrow \langle q \rightsquigarrow s \rangle \; s \end{array}$$

Dit is een bewijs voor $p \rightsquigarrow s = 1$, door middel van transitiviteit, met de veronderstellingen $p \rightsquigarrow q = 1$ en $q \rightsquigarrow s = 1$. Zo een bewijs vertoont een sterke gelijkenis met de vertrouwde werkwijze uit het klassieke rekenen, namelijk het inlassen van operatoren als verbindingsstukken tussen onze uitdrukkingen. Om te zorgen dat we, zoals bij een meta-stelling voor transitiviteit, de premisses $p \rightsquigarrow q = 1$ en $q \rightsquigarrow s = 1$, zouden kunnen omwisselen (indien nodig in een bewijs), hebben we volgende stellingen nodig:

Stelling 17 (SH$\curlywedge/\rightsquigarrow$ "Shunting met $\curlywedge$ en $\rightsquigarrow$")**.**

$$x \rightsquigarrow y \rightsquigarrow z = x \curlywedge y \ \rightsquigarrow z$$

Merk op dat we hebben afgesproken dat de t-norm sterker bindt dan de implicatie en $x \curlywedge y \ \rightsquigarrow z$ dus staat voor $(x \curlywedge y) \rightsquigarrow z$. Het bewijs van deze stelling volgt vrijwel onmiddellijk uit de Galois-connectie:

Bewijs.

$$\begin{array}{rcl} x \rightsquigarrow y \rightsquigarrow z & = \langle \text{Def. } \rightsquigarrow, \text{Rechts-ass. } \rightsquigarrow \rangle & \bigvee (\gamma : [0,1] \mid x \curlywedge \gamma \leq y \rightsquigarrow z) \\ & = \qquad \langle \text{GC} \rangle & \bigvee (\gamma : [0,1] \mid x \curlywedge \gamma \curlywedge y \leq z) \\ & = \ \langle \text{Assoc. } \curlywedge, \text{Comm. } \curlywedge \rangle & \bigvee (\gamma : [0,1] \mid (x \curlywedge y) \curlywedge \gamma \leq z) \\ & = \qquad \langle \text{Def. } \rightsquigarrow \rangle & x \curlywedge y \rightsquigarrow z \end{array}$$

De uitdrukking $(\gamma : [0,1] \mid x \curlywedge \gamma \leq y \rightsquigarrow z)$ staat voor de functieabstractie $(\gamma : [0,1] \wedge x \curlywedge \gamma \leq y \rightsquigarrow z \,.\, \gamma)$, zoals vermeld in hoofdstuk 1. □

We zullen deze uitdrukking op twee manieren noteren om de richting waarin we "shunten" aan te duiden. Enerzijds noteren we "SH$\rightsquigarrow/\curlywedge$" als we van $a \rightsquigarrow b \rightsquigarrow c$ naar $a \curlywedge b \rightsquigarrow c$ gaan, anderzijds noteren we "SH$\curlywedge/\rightsquigarrow$" wanneer we "shunten" van $a \curlywedge b \rightsquigarrow c$ naar $a \rightsquigarrow b \rightsquigarrow c$.

Opmerking. *Merk op dat we in dit bewijs gebruikmaakten van "$=$" als verbinding, waar we in de vorige bewijzen telkens "$\equiv$" hebben gebruikt. De reden hiervoor is dat in dit bewijs het linkerlid en het rechterlid waarden in het interval* $[0,1]$ *kunnen aannemen; "$\equiv$" is echter enkel bruikbaar wanneer de twee argumenten in* $\mathbb{B}$ *gelegen zijn, daarom moeten we hier "$=$" schrijven.*

Het bewijs voor de volgende stelling, die, zoals eerder vermeld, het omdraaien opnieuw toelaat, volgt dan eenvoudig uit shunting eigenschap van $\curlywedge$ en $\rightsquigarrow$:

Stelling 18 (SH$\rightsquigarrow$ "Shunting met $\rightsquigarrow$)**.**

$$x \rightsquigarrow y \rightsquigarrow z = y \rightsquigarrow x \rightsquigarrow z$$

Bewijs.

$$\begin{array}{rcl} x \rightsquigarrow y \rightsquigarrow z & \equiv \quad \langle \text{SH}\curlywedge \rangle & x \curlywedge y \rightsquigarrow z \\ & \equiv \langle \text{Comm. } \curlywedge \rangle & y \curlywedge x \rightsquigarrow z \\ & \equiv \quad \langle \text{SH}\curlywedge \rangle & y \rightsquigarrow x \rightsquigarrow z \end{array}$$

□

3.3 De "Axioma's" van Hájek als stellingen

De eigenschappen die we in deze sectie zullen bewijzen, zijn de axioma's die Hájek vooropstelt in [Háj98]. Daar onze aanpak anders is, zullen we ze niet als axioma invoeren, maar wel degelijk bewijzen. Het eerste axioma is het "verzwakken van de t-norm (weakening of t-norm)".

Stelling 19 (W$\curlywedge$ "Verzwakken van de t-norm")**.**

$$x \curlywedge y \rightsquigarrow x = 1$$

Bewijs.

$$\begin{aligned} &\langle 1 \text{ gr. elt.}\rangle \;\; y \leq 1 \\ \Rightarrow\; &\langle \text{Mon. } \curlywedge\rangle \;\; x \curlywedge y \leq x \curlywedge 1 \\ \equiv\; &\langle \text{Eenh. } \curlywedge\rangle \;\; x \curlywedge y \leq x \\ \equiv\; &\langle \text{Eq. } \leq/\rightsquigarrow\rangle \;\; x \curlywedge y \rightsquigarrow x \end{aligned}$$

□

Vervolgens hebben we een stelling die ons toelaat om te stellen dat uit een valse premisse eender wat volgt.

Stelling 20 (FFE "Uit valsheid volgt eender wat")**.**

$$0 \rightsquigarrow x = 1$$

Bewijs.

$$\begin{aligned} 0 \rightsquigarrow x = 1 \quad &\equiv \langle \text{Eq. } \leq/\rightsquigarrow\rangle \;\; 0 \leq x \\ &\equiv \;\langle 0 \text{ kl. elt.}\rangle \;\; 1 \end{aligned}$$

□

Om "nonsens"-uitdrukkingen te vermijden, zullen we hier de conventie invoeren dat wanneer p niet in het interval $[0,1]$ zit, er geldt dat $0 \rightsquigarrow p = 1$. Een tweede conventie die we hiervoor aannemen is dat $p \rightsquigarrow 1 = 1$, ongeacht p.

Stelling 21. $(x \curlywedge (x \rightsquigarrow y)) \rightsquigarrow (y \curlywedge (y \rightsquigarrow x)) = 1$

Bewijs. We bewijzen dit via een gevallenonderzoek, eerst voor het geval $x \geq y$:

$$\begin{aligned} x \curlywedge (x \leadsto y) \leadsto y \curlywedge (y \leadsto x) &= \langle \text{Eq. } \leq/\leadsto \rangle \; x \curlywedge (x \leadsto y) \leadsto y \curlywedge 1 \\ &= \langle \text{Eénh. } \curlywedge \rangle \; x \curlywedge (x \leadsto y) \leadsto y \\ &= \langle \text{FMP} \rangle \; 1 \end{aligned}$$

Het andere geval is $x < y$:

$$\begin{aligned} x \curlywedge (x \leadsto y) \leadsto y \curlywedge (y \leadsto x) &= \langle \text{Eq. } \leq/\leadsto \rangle \; x \curlywedge 1 \leadsto y \curlywedge (y \leadsto x) \\ &= \langle \text{Eénh. } \curlywedge \rangle \; x \leadsto y \curlywedge (y \leadsto x) \\ &= \langle \text{St. } 15 \rangle \; x \leadsto y \\ &= \langle \text{Eq. } \leq/\leadsto \rangle \; x \leq y \end{aligned}$$

□

Dan komen we tot de laatste stelling die Hájek als axioma invoert in zijn boek.

Stelling 22. $((x \leadsto y) \leadsto z) \leadsto ((y \leadsto x) \leadsto z) \leadsto z = 1$

Bewijs. Ook dit bewijzen we via een gevallenonderzoek, eerst voor $x \leq y$:

$$\begin{aligned} &((x \leadsto y) \leadsto z) \leadsto ((y \leadsto x) \leadsto z) \leadsto z \\ &= \langle \text{SH}{\leadsto}/\curlywedge \rangle \quad ((x \leadsto y) \leadsto z) \curlywedge ((y \leadsto x) \leadsto z) \leadsto z \\ &= \langle \text{Eq. } \leq/\leadsto \rangle \quad ((x \leq y) \leadsto z) \curlywedge ((y \leadsto x) \leadsto z) \leadsto z \\ &= \langle \text{Aanname } x \leq y \rangle \quad (1 \leadsto z) \curlywedge ((y \leadsto x) \leadsto z) \leadsto z \\ &= \langle \text{Eenh. } \leadsto \rangle \quad z \curlywedge ((y \leadsto x) \leadsto z) \leadsto z \\ &= \langle \text{W}\curlywedge \rangle \quad 1 \end{aligned}$$

Het tweede geval volgt volledig analoog wegens de commutativiteit van de t-norm bij de twee conjuncten die we kunnen bekomen door SH$\leadsto/\curlywedge$ toe te passen. □

3.4 Verdere eigenschappen van $\curlywedge$ en $\leadsto$

In de volgende bewijzen zullen we zoveel mogelijk vermijden terug te grijpen naar het feit dat $p \leadsto q = 1 \equiv p \leq q$. Bewijzen zijn namelijk merkbaar eleganter wanneer ze enkel steunen op de vaaglogische operatoren.

3.4.1 Eigenschappen van $\leadsto$

Een eerste stelling geeft ons een verband tussen de scherpe en de vaagimplicatie:

Stelling 23 (SH$\Rightarrow/\leadsto$ "Shunting met $\Rightarrow/\leadsto$")**.**

$$\forall\, p : [0,1] \,.\, b : \mathbb{B} \,.\, b \Rightarrow (p = 1) \equiv b \leadsto p = 1$$

Bewijs. Voor willekeurige $p : [0,1]$ geldt:

$$\begin{aligned}
&\forall\, b : \mathbb{B} \,.\, b \Rightarrow (p = 1) \equiv b \leadsto p = 1 \\
\equiv\ & \langle \text{Domeinopsplits.} \rangle \quad (0 \Rightarrow (p = 1) \equiv 0 \leadsto p = 1) \wedge (1 \Rightarrow (p = 1) \equiv 1 \leadsto p = 1) \\
\equiv\ & \langle 0 \Rightarrow q \equiv 1, \text{ FFE} \rangle \quad (1 \equiv 1 = 1) \wedge (1 \Rightarrow (p = 1) \equiv 1 \leadsto p = 1) \\
\equiv\ & \langle \text{Refl. } =, \text{ Eenh. } \wedge \rangle \quad 1 \Rightarrow (p = 1) \equiv 1 \leadsto p = 1 \\
\equiv\ & \langle 1 \Rightarrow q \equiv q, \text{ Eenh. } \leadsto \rangle \quad p = 1 \equiv p = 1 \\
\equiv\ & \langle \text{Refl. } \equiv \rangle \quad 1
\end{aligned}$$

□

Deze eigenschap komt vooral van pas in het hoofdstuk over de vaagpredikaten. Een tweede eigenschap laat ons toe om de implicatie te verzwakken:

Stelling 24 (W$\leadsto$ "Verzwakken van de implicatie")**.**

$$x \leadsto y \leadsto x = 1$$

Bewijs.

$$\begin{aligned}
1 \ &= \langle \text{W}\curlywedge \rangle \quad x \curlywedge y \leadsto x \\
&= \langle \text{SH}\curlywedge/\leadsto \rangle \quad x \leadsto y \leadsto x
\end{aligned}$$

□

De volgende stelling drukt de reflexiviteit van de residuum-implicator uit:

Stelling 25 (R$\leadsto$ "Reflexiviteit van de R-implicator")**.**

$$x \leadsto x = 1$$

Bewijs.

$$\begin{aligned}
1 \ &= \langle \text{W}\curlywedge \rangle \quad x \curlywedge 1 \leadsto x \\
&= \langle x \curlywedge 1 = x \rangle \quad x \leadsto x
\end{aligned}$$

□

3.4.2 Eigenschappen van $\curlywedge$ met $\rightsquigarrow$

We beschrijven nog enkele interacties tussen de t-norm en zijn residuum en presenteren een calculationeel vaaglogisch bewijs voor deze eigenschappen.

Stelling 26 (AC$\curlywedge$ "Accumulatie")**.**

$$x \rightsquigarrow y \rightsquigarrow x \curlywedge y = 1$$

Bewijs.

$$\begin{aligned} 1 &= \langle \mathrm{R}{\rightsquigarrow} \rangle \quad (x \curlywedge y) \rightsquigarrow (x \curlywedge y) \\ &= \langle \mathrm{SH}{\curlywedge}/{\rightsquigarrow} \rangle \; x \rightsquigarrow y \rightsquigarrow x \curlywedge y \end{aligned}$$

□

De naam "Accumulatie" is gebaseerd op de vorm van de regel. De regel lijkt immers als het ware x en y uit de twee antecedenten te accumuleren in het consequent.

De volgende stelling laat ons toe om éénzelfde willekeurige term toe te voegen bij zowel het antecedent als de consequent van de residuum-implicator (vandaar de naam "Introductie"). Tevens bekomen we door "Shunting" van $\rightsquigarrow$ naar $\curlywedge$ toe te passen op deze stelling, een tweede stelling die ons toelaat om de vaagmodusponens toe te passen wanneer het antecedent in een conjunctie staat met een ander element.

Stelling 27 (I$\rightsquigarrow/\curlywedge$ "Introductie $\rightsquigarrow/\curlywedge$")**.**

$$(x \rightsquigarrow y) \rightsquigarrow (x \curlywedge z) \rightsquigarrow (y \curlywedge z) = 1$$

Bewijs.

$$\begin{aligned} (x \rightsquigarrow y) \rightsquigarrow (x \curlywedge z) \rightsquigarrow (z \curlywedge y) &= \quad \langle \mathrm{SH} \rangle \quad (x \rightsquigarrow y) \curlywedge x \curlywedge z \rightsquigarrow z \curlywedge y \\ &= \quad \langle \mathrm{SH} \rangle \quad (x \rightsquigarrow y) \curlywedge x \rightsquigarrow z \rightsquigarrow z \curlywedge y \\ &= \langle \text{Lemma 3} \rangle \; 1 \end{aligned}$$

□

Lemma 3. $(x \rightsquigarrow y) \curlywedge x \;\rightsquigarrow\; (z \rightsquigarrow z \curlywedge y) = 1$

Bewijs.

$$\begin{aligned}(x \rightsquigarrow y) \curlywedge x \quad &\rightsquigarrow \langle \mathrm{MP} \rangle \quad y \\ &\rightsquigarrow \langle \mathrm{AC}\curlywedge \rangle \ z \rightsquigarrow z \curlywedge y\end{aligned}$$

□

In het bewijs van dit lemma kan men al een glimp opvangen van waar we nu precies naartoe willen: een bewijsformaat waarin we met de operatoren van de vaaglogica twee stappen in een bewijs verbinden, zoals we reeds kunnen in de calculationele formuleringen van de klassieke logica. Naar het einde van het hoofdstuk toe zullen we in staat zijn om volledige bewijsvoeringen te construeren waarin we enkel gebruikmaken van vaaglogische operatoren.

Door "Shunting" van $\rightsquigarrow$ naar $\curlywedge$ toe te passen op de vorige stelling bekomen we een soort uitgebreide vorm van de "vaagmodus-ponens".

Stelling 28 (EFMP "Uitgebreide vaagmodusponens")**.**

$$(x \rightsquigarrow y) \curlywedge x \curlywedge z \ \rightsquigarrow \ y \curlywedge z = 1$$

Bewijs.

$$\begin{aligned}&\langle \mathrm{I}\rightsquigarrow/\curlywedge \rangle \quad (x \rightsquigarrow y) \rightsquigarrow (x \curlywedge z) \rightsquigarrow (y \curlywedge z) \\ = &\langle \mathrm{SH}\rightsquigarrow/\curlywedge \rangle \ (x \rightsquigarrow y) \curlywedge x \curlywedge z \rightsquigarrow y \curlywedge z\end{aligned}$$

□

Dan komen we ten slotte aan de laatste stelling met betrekking tot de interactie tussen de vaagimplicatie en vaagconjunctie. Deze stelling is enorm handig wanneer men de antecedenten en consequenten van twee vaagimplicaties wenst samen te voegen.

Stelling 29 (ME$\rightsquigarrow$ "Samensmelten (Melting) van de implicatie")**.**

$$(x \rightsquigarrow y) \curlywedge (z \rightsquigarrow u) \rightsquigarrow (x \curlywedge z) \rightsquigarrow (y \curlywedge u) = 1$$

Bewijs.

$$\begin{aligned}&(x \rightsquigarrow y) \curlywedge (z \rightsquigarrow u) \rightsquigarrow (x \curlywedge z) \rightsquigarrow (y \curlywedge u) \\ = \quad &\langle \mathrm{SH} \rangle \quad (x \rightsquigarrow y) \rightsquigarrow (z \rightsquigarrow u) \rightsquigarrow (x \curlywedge z) \rightsquigarrow (y \curlywedge u) \\ = \quad &\langle \mathrm{SH} \rangle \quad (x \rightsquigarrow y) \rightsquigarrow (z \rightsquigarrow u) \curlywedge x \curlywedge z \rightsquigarrow (y \curlywedge u) \\ = \quad &\langle \text{Lemma 4} \rangle \quad 1\end{aligned}$$

□

Lemma 4. $(x \rightsquigarrow y) \curlywedge (z \rightsquigarrow u) \curlywedge x \curlywedge z \;\rightsquigarrow\; y \curlywedge u$

Bewijs.

$$\begin{aligned}(x \rightsquigarrow y) \curlywedge (z \rightsquigarrow u) \curlywedge x \curlywedge z \quad &\rightsquigarrow \langle\text{EFMP}\rangle\; y \curlywedge z \curlywedge (z \rightsquigarrow u)\\ &\rightsquigarrow \langle\text{EFMP}\rangle\; y \curlywedge u\end{aligned}$$

□

Tot hiertoe hebben we alles gedaan met maar twee operatoren, namelijk de vaagconjunctie (de t-norm) en de vaagimplicatie (het residuum van de t-norm). Met deze twee operatoren zouden we alle stellingen die we kunnen tegenkomen, moeten kunnen bewijzen. Echter, om een praktisch bruikbare vaaglogica te ontwikkelen is het aangewezen om andere operatoren in te voegen die veelvoorkomende patronen vatten, zodat we voor deze patronen elegante, korte rekenregels kunnen ontwikkelen. In de volgende secties zullen we deze nieuwe operatoren invoegen, samen met enkele eigenschappen.

3.5 Aanvullende operatoren

3.5.1 De vaagequivalentie-operator

We voeren de *vaagequivalentie* in als volgt:

Definitie (Vaagequivalentie)**.**

$$a \approx b = (a \rightsquigarrow b) \curlywedge (b \rightsquigarrow a)$$

We geven deze operator de laagste precedentie onder de vaagoperatoren. De operator heeft wel voorrang op de scherpe equivalentieoperator '≡' en het gelijkheidsteken '='. De volgende stelling geeft het verband tussen de vaagequivalentie en de klassieke gelijkheids-operator. De haakjes in de stelling zijn niet strikt noodzakelijk wegens de net vermelde voorrangsregels, maar hebben we toch neergeschreven om verwarring te vermijden.

Stelling 30 (L≈/= "Verband vaagequivalentie en gelijkheid")**.**

$$(a \approx b) = 1 \equiv a = b$$

Bewijs.

$$\begin{aligned}
a \approx b = 1 \quad &\equiv \quad \langle \text{Def. } \approx \rangle \quad (a \rightsquigarrow b) \curlywedge (b \rightsquigarrow a) = 1 \\
&\equiv \quad \langle \text{Lemma 5} \rangle \quad (a \rightsquigarrow b = 1) \curlywedge (b \rightsquigarrow a = 1) \\
&\equiv \quad \langle \text{Eq. } \leq / \rightsquigarrow \rangle \quad a \leq b \wedge b \leq a \\
&\equiv \langle \text{Antisymm. } \leq \rangle \; a = b
\end{aligned}$$

□

Lemma 5.

$$x \curlywedge y = 1 \equiv x = 1 \wedge y = 1$$

Bewijs. We splitsen het bewijs op in twee implicaties. Eerst bewijzen we $(x = 1) \wedge (y = 1) \Rightarrow (x \curlywedge y = 1)$

$$\begin{aligned}
(x = 1) \wedge (y = 1) \quad &\Rightarrow \quad \langle \text{Leibn.} \rangle \quad x \curlywedge y = 1 \curlywedge 1 \\
&\Rightarrow \langle \text{Eénh. } \curlywedge \rangle \; x \curlywedge y = 1
\end{aligned}$$

Vervolgens bewijzen we $(x \curlywedge y = 1) \Rightarrow (x = 1) \wedge (y = 1)$:

$$\begin{aligned}
(x \curlywedge y = 1) \quad &\Rightarrow \langle (x \curlywedge y \leq x), (x \curlywedge y \leq y \rangle \; (1 \leq x) \wedge (1 \leq y) \\
&\Rightarrow \qquad \langle \text{1 gr. elt.} \rangle \qquad (x = 1) \wedge (y = 1)
\end{aligned}$$

□

Met andere woorden, wanneer we een stelling van de vorm $a \approx b = 1$ hebben, of wanneer we in een bewijs de verbinding $a \approx b$ gebruiken, dan is dit wegens voorgaande stelling hetzelfde als het stellen of het gebruiken van $a = b$.

De naam "equivalentie-operator" is in dit geval een verantwoorde keuze. Als argument tonen we aan dat de vaagequivalentie wel degelijk een equivalentierelatie is.

Stelling 31 (R≈ "Reflexiviteit van de vaagequivalentie")**.**

$$x \approx x = 1$$

Bewijs.

$$\begin{aligned}
x \approx x \quad &= \langle \text{Def. } \approx \rangle \; (x \rightsquigarrow x) \curlywedge (x \rightsquigarrow x) \\
&= \quad \langle \text{R} \rightsquigarrow \rangle \quad 1 \curlywedge 1 \\
&= \langle \text{Eenh. } \curlywedge \rangle \; 1
\end{aligned}$$

□

Vervolgens tonen we de symmetrie-eigenschap aan.

Stelling 32 (S$\approx$ "Symmetrie van de vaagequivalentie")**.**

$$(x \approx y) \rightsquigarrow (y \approx x) = 1$$

Bewijs.

$$\begin{aligned} x \approx y &= \langle \text{Def. } \approx \rangle \quad (x \rightsquigarrow y) \curlywedge (y \rightsquigarrow x) \\ &= \langle \text{Comm. } \curlywedge \rangle \quad (y \rightsquigarrow x) \curlywedge (x \rightsquigarrow y) \\ &= \langle \text{Def. } \approx \rangle \quad y \approx x \end{aligned}$$

□

Tot slot bewijzen we dat de transitiviteit geldig is.

Stelling 33 (T$\approx$ "Transitiviteit van de vaagequivalentie")**.**

$$(x \approx y) \curlywedge (y \approx z) \rightsquigarrow (x \approx z) = 1$$

Bewijs.

$$\begin{aligned} (x \approx y) \curlywedge (y \approx z) &= \langle \text{Def. } \approx \rangle \quad (x \rightsquigarrow y) \curlywedge (y \rightsquigarrow x) \curlywedge (y \rightsquigarrow z) \curlywedge (z \rightsquigarrow y) \\ &\rightsquigarrow \langle \text{EFMP,T}\rightsquigarrow \rangle \quad (x \rightsquigarrow z) \curlywedge (y \rightsquigarrow x) \curlywedge (z \rightsquigarrow y) \\ &\rightsquigarrow \langle \text{EFMP,T}\rightsquigarrow \rangle \quad (x \rightsquigarrow z) \curlywedge (z \rightsquigarrow x) \\ &= \langle \text{Def. } \approx \rangle \quad x \approx z \end{aligned}$$

□

De transitiviteit laat ons wederom toe om de equivalentie-operator als verbinding te gebruiken in een bewijs, op dezelfde manier als we reeds opgemerkt hebben voor de implicatie (als verbinding in een bewijs heeft de vaagequivalentie uiteraard dezelfde betekenis als "="). We merken op dat we ook operatoren mogen "mengen" in een bewijs, zoals we dit reeds gedaan hebben voor de vaagimplicatie en de gelijkheid. De reden waarom we dit mogen doen is omdat een bewijs van de vorm

$$\begin{aligned} r &\rightsquigarrow \langle r \rightsquigarrow p \rangle \; p \\ &= \langle p = q \rangle \; q \end{aligned}$$

geldig is wegens het feit dat

$$(r \rightsquigarrow p = 1) \wedge (p = q) \Rightarrow \langle \text{Leibniz} \rangle \; r \rightsquigarrow q = 1$$

De geldigheid van de andere gebruikte vorm:

$$\begin{aligned} r \quad &= \langle r = p\rangle \;\; p \\ &\rightsquigarrow \langle p \rightsquigarrow q\rangle \;\; q \end{aligned}$$

volgt dan uit

$$(r = p) \wedge (p \rightsquigarrow q = 1) \Rightarrow \langle \text{Leibniz}\rangle\; r \rightsquigarrow q = 1$$

Tot slot tonen we aan dat we ook de vaagequivalentie en de vaagimplicatie op deze manier mogen mengen in een bewijs. Een bewijs van de vorm:

$$\begin{aligned} r \quad &\rightsquigarrow \quad \langle r \rightsquigarrow p\rangle \quad p \\ &\approx \langle p \approx q = 1\rangle \;\; q \end{aligned}$$

komt namelijk overeen met de algemene vorm

$$(r \rightsquigarrow p = 1) \wedge (p \approx q = 1)$$

die duidelijk, wegens $p \approx q = 1 \equiv p = q$, op hetzelfde neerkomt als de voorgaande beschouwingen voor het mengen van de vaagimplicatie en het gelijkheidsteken. De bewijsvorm met eerst de vaagequivalentie en dan de vaagimplicatie volgt dan volledig analoog.

We merken wel op dat deze equivalentie niet meer associatief is. Wanneer we deze gebruiken als schakel in een bewijs moet men dus telkens “mentale haakjes” rond de regel boven het teken en de regel naast het teken zetten om de juiste equivalentie te lezen. We zullen het gebruik van $\approx$ verkiezen boven het gebruik van $=$ op plaatsen waar dit kan (dit is overal waar het rechter- en linkerlid in een bewijsregel een element uit $[0, 1]$ is). Dit is gelijkaardig aan het verkiezen van $\equiv$ boven $=$ wanneer we een bewijs construeren in de klassieke logica.

We geven tot slot nog enkele andere eigenschappen in verband met de vaagequivalentie:

Stelling 34 (W$\approx$ “Verzwakken van $\approx$”)**.**

$$(x \approx y) \rightsquigarrow (x \rightsquigarrow y) = 1$$

Het bewijs hiervan volgt onmiddellijk uit de definitie en de gelijknamige eigenschap van de t-norm conjunctie (stelling 19).

Bewijs.

$$\begin{aligned} x \approx y \quad &\approx \langle \text{Def. } \approx\rangle \;\; (x \rightsquigarrow y) \curlywedge (y \rightsquigarrow x) \\ &\rightsquigarrow \quad \langle \text{W}\curlywedge\rangle \quad x \rightsquigarrow y \end{aligned}$$

$\square$

De volgende eigenschap levert ons een introductie-eigenschap die gelijkaardig is aan deze van de vaagimplicatie.

Stelling 35 (I$\approx$ "Introductie $\approx$")**.**

$$(x \approx y) \rightsquigarrow (x \curlywedge z \approx y \curlywedge z) = 1$$

Bewijs.

$$\begin{array}{rcll} x \approx y & \approx & \langle \text{Def. } \approx \rangle & (x \rightsquigarrow y) \curlywedge (y \rightsquigarrow x) \\ & \rightsquigarrow & \langle \text{EFMP,I}\rightsquigarrow \rangle & (x \curlywedge z \rightsquigarrow y \curlywedge z) \curlywedge (y \rightsquigarrow x) \\ & \rightsquigarrow & \langle \text{EFMP,I}\rightsquigarrow \rangle & (x \curlywedge z \rightsquigarrow y \curlywedge z) \curlywedge (y \curlywedge z \rightsquigarrow x \curlywedge z) \\ & \approx & \langle \text{Def. } \approx \rangle & x \curlywedge z \approx y \curlywedge z \end{array}$$

□

Merk op dat we in dit bewijs de $\approx$ en $\rightsquigarrow$ gemengd hebben, wat, zoals reeds opgemerkt, wel degelijk mag.

We hebben nu nog een tweede introductie-stelling:

Stelling 36 (I$\approx/\rightsquigarrow$ "Introductie $\approx/\rightsquigarrow$")**.**

$$(x \approx y) \rightsquigarrow (x \rightsquigarrow z) \approx (y \rightsquigarrow z) = 1$$

Bewijs.

$$\begin{array}{rcll} x \approx y & \approx & \langle \text{Def. } \approx \rangle & (x \rightsquigarrow y) \curlywedge (y \rightsquigarrow x) \\ & \rightsquigarrow & \langle \text{EFMP, T}\rightsquigarrow\text{, 2x} \rangle & ((y \rightsquigarrow z) \rightsquigarrow (x \rightsquigarrow z)) \curlywedge ((x \rightsquigarrow z) \rightsquigarrow (y \rightsquigarrow z)) \\ & \approx & \langle \text{Def. } \approx \rangle & (x \rightsquigarrow z) \approx (y \rightsquigarrow z) \end{array}$$

□

Na deze sectie zijn we in staat om calculationele bewijsvoeringen neer te schrijven die exclusief gebruik maken van vaaglogische operatoren. Bewijzen zoals deze van stelling 36 laten duidelijk zien hoe elegant deze manier van werken is tegenover het gebruik van deductiebomen.

Nu ontbreken nog twee operatoren die we wensen in te voeren, nl. de vaagnegatie en de vaagdisjunctie. In de volgende sectie voeren we allereerst de vaagnegatie in, die we nodig zullen hebben om daarna de vaagdisjunctie te kunnen definiëren.

3.5.2 De vaagnegatie

Daar het aantal negatoren (functies die een uitbreiding van de klassieke negatie kunnen zijn) dat we kunnen kiezen oneindig groot is, zullen we hier enkel de eigenschappen bespreken van de negator die rechtstreeks verbonden is met de definitie van de t-norm. We kunnen uiteraard andere negatoren gebruiken, maar we wensen ons te beperken tot de operatoren die vastliggen zodra de t-norm vastligt. We wensen immers niet zozeer alle regels te overlopen, maar vooral de stijl te illustreren.

Definitie (Vaagnegatie)**.**

$$\sim x = x \rightsquigarrow 0$$

Daar het residuum volledig bepaald wordt door de gekozen t-norm, volgt uit de vorige definitie dat ook deze negator hierdoor volledig bepaald is. Deze nieuwe operator heeft de hoogste precedentie onder alle operatoren die we tegenkomen, op de scherpe negatie na, waarmee hij op gelijke voet staat.

Wanneer we deze negator toepassen op argumenten uit $\mathbb{B}$, stemt hij overeen met de negatie uit de klassieke logica. Tevens is deze negator een dalende functie, wat aangetoond wordt in het bewijs van de volgende stelling:

Stelling 37 (Dal. $\sim$ "Dalend zijn van $\sim$")**.**

$$(a \leq b) \Rightarrow (\sim b \leq \sim a)$$

Bewijs.

$$\begin{array}{lcl} a \leq b & \Rightarrow \langle \text{Antiton. Antec. } \rightsquigarrow \rangle & b \rightsquigarrow 0 \leq a \rightsquigarrow 0 \\ & \equiv \quad \langle \text{Def. } \sim \rangle & \sim b \leq \sim a \end{array}$$

□

We geven nu kort nog enkele eigenschappen, die een mooie illustratie bieden van onze calculationele stijl:

Stelling 38 (DN "Dubbele negatie")**.**

$$x \rightsquigarrow \sim(\sim x) = 1$$

Bewijs.

$$\begin{array}{lll} & \langle\text{FMP}\rangle & x \curlywedge (x \rightsquigarrow 0) \rightsquigarrow 0 \\ \approx & \langle\text{SH}\curlywedge/\rightsquigarrow, \text{Def. } \sim\rangle & x \rightsquigarrow (\sim x) \rightsquigarrow 0 \\ \approx & \langle\text{Def. } \sim\rangle & x \rightsquigarrow \sim (\sim x) \end{array}$$

□

Shunting van de tweede regel in het bewijs levert de wet van de contradictie: $p \curlywedge \sim p \rightsquigarrow 0$. Bij andere negatoren en bepaalde t-normen, zoals de Zadeh-negator, gegeven door $\sim p = 1 - p$, gecombineerd met de minimum-functie als t-norm, is dit een eigenschap die verloren gaat. Daartegenover staat dan weer dat onze negator voor een willekeurige t-norm niet noodzakelijk involutief is (dit betekent dat $\sim (\sim x) \approx x$ niet geldig is). Voor de Lukasiewicz t-norm blijkt dit echter wel geldig te zijn [Háj98]. De volgende eigenschap levert een afgezwakte contrapositie (bij bepaalde t-normen, zoals de Lukasiewicz t-norm, gecombineerd met deze negator, kunnen we echter wel de normale contradictie-eigenschap bewijzen):

Stelling 39 (WCP$\rightsquigarrow/\sim$ "Afgezwakte contrapositie")**.**

$$(x \rightsquigarrow y) \rightsquigarrow (\sim y \rightsquigarrow \sim x) = 1$$

Bewijs.

$$\begin{array}{llll} x \rightsquigarrow y & \rightsquigarrow & \langle\text{T}\rightsquigarrow\rangle & (y \rightsquigarrow 0) \rightsquigarrow (x \rightsquigarrow 0) \\ & \approx & \langle\text{Def. } \sim\rangle & \sim y \rightsquigarrow \sim x \end{array}$$

□

De werkelijke contrapositie blijkt niet meer geldig te zijn met deze vaagnegator. Dit kan men gemakkelijk inzien door $x = 1/2$ en $y = 1/3$ in te vullen. Er geldt dan $\sim x = 0$ en $\sim y = 0$, waardoor $\sim x \rightsquigarrow \sim y = 1$, maar $x \rightsquigarrow y$ is dan bijvoorbeeld niet gelijk aan 1 bij de Gödelimplicator, die gedefinieerd is door: $x \rightsquigarrow y = x \leq y\,?\,1 \nmid y$ (de $?$-$\nmid$ constructie staat besproken in de Funmath-inleiding in hoofdstuk 1 en is een "if-then-else"-constructie). Deze implicator verkrijgt men als men $\curlywedge$ als t-norm kiest.

Met deze vaagnegator in de hand hebben we alles wat we nodig hebben om de vaagdisjunctie in te voeren.

3.5.3 De vaagdisjunctie

Om een vaagdisjunctie voor te stellen, maken we gebruik van een "t-conorm", dit is een functie die stijgend is en zich herleidt tot de scherpe disjunctie wanneer we enkel argumenten uit $\mathbb{B}$ nemen.

Er bestaan uiteraard verschillende t-conormen. Welke moeten we nu kiezen? In onze logica wensen we een t-conorm die, net zoals de andere operatoren, volledig bepaald is éénmaal we een t-norm hebben vastgelegd. Daarvoor bestaan echter ook verschillende mogelijkheden. Eén mogelijke optie is het definiëren van de t-conorm door middel van een t-norm en een negator. De vaagdisjunctie kunnen we dan zodanig kiezen dat deze, samen met de t-norm en de negator, voldoet aan een afgezwakte wet van De Morgan. We moeten hier wel een afgezwakte wet van De Morgan gebruiken omdat onze vaagnegatie niet involutief is, waardoor we geen "De Morgan triplet" kunnen construeren (dit is een combinatie van een t-norm, een t-conorm en een negator die zo gekozen zijn dat ze voldoen aan de wetten van De Morgan). Daar onze negator reeds vasthangt aan de gekozen t-norm opteren we dan ook om een dergelijke definitie te gebruiken, wat ons volgende definitie oplevert:

Definitie (T-conorm)**.**

$$a \curlyvee b = \sim (\sim a \curlywedge \sim b)$$

We geven deze operator dezelfde precedentie als de t-norm.

In [Háj98] wordt de disjunctie niet besproken. Om deze vaaglogica echter werkbaar te maken in alledaagse omstandigheden zijn eigenschappen voor deze operator onmisbaar. Daarom zullen we hier wel enkele eigenschappen invoeren en bewijzen, geïnspireerd door eigenschappen geldig in de klassieke propositielogica. Zoals reeds vermeld is het opzet van deze tekst echter niet om zoveel mogelijk eigenschappen te ontdekken, maar om aan te tonen hoe de vaaglogica calculationeel gemaakt kan worden en zodoende bruikbaarder gemaakt kan worden. Omwille van die reden zal het aantal eigenschappen dat we hier invoeren dan ook eerder beperkt zijn, maar desalniettemin uitgebreider dan [Háj98]. We onderzoeken eerst in hoeverre de vier varianten op de eigenschappen van de t-norm geldig zijn. Als eerste eigenschap hebben we de commutativiteit:

Stelling 40 (Comm. $\curlyvee$ "Commutativiteit t-conorm")**.**

$$a \curlyvee b \approx b \curlyvee a = 1$$

Bewijs.

$$
\begin{aligned}
a \curlyvee b \quad & \approx \ \langle \text{Def. } \curlyvee \rangle \quad \sim (\sim a \curlywedge \sim b) \\
& \approx \langle \text{Comm. } \curlywedge \rangle \ \sim (\sim b \curlywedge \sim a) \\
& \approx \ \langle \text{Def. } \curlyvee \rangle \quad b \curlyvee a
\end{aligned}
$$

□

Voor de associativiteit konden we niet bepalen of deze t-conorm er al dan niet aan voldoet. Het probleem situeert zich bij de drie meest bekende continue t-normen. De Lukasiewicz t-norm geeft aanleiding tot een involutieve negator. De max-functie en de probabilistische som geven aanleiding tot een negator met waarden in $\mathbb{B}$. Door deze eigenschappen blijkt een tegenvoorbeeld construeren niet mogelijk te zijn met deze t-normen. Een bewijs voor de geldigheid werd echter ook niet gevonden.

De éénheidselement-eigenschap blijkt, door het ontbreken van de involutiviteit bij de negator, echter niet meer geldig te zijn. We kunnen enkel volgende stelling bewijzen:

Stelling 41 (Eénh. $\curlyvee$ "Eénheidselement t-conorm")**.**

$$a \curlyvee 0 \approx \sim (\sim a) = 1$$

Bewijs.

$$
\begin{aligned}
a \curlyvee 0 \quad & \approx \ \langle \text{Def. } \curlyvee \rangle \ \sim (\sim a \curlywedge \sim 0) \\
& \approx \langle \sim 0 = 1 \rangle \ \sim (\sim a \ \curlywedge 1) \\
& \approx \langle \text{Eénh. } \curlywedge \rangle \ \sim (\sim a)
\end{aligned}
$$

□

Een tegenvoorbeeld construeren voor $\sim (\sim a)$ kan met bijvoorbeeld de Gödelnegator, gedefinieerd door $x > 0\,?\,0 \nmid 1$, en $a = 1/3$, waardoor $\sim (\sim a) = 1$, wat duidelijk niet gelijk is aan de waarde van a. We kunnen wel het zero-element bewijzen:

Stelling 42 (Zero $\curlyvee$ "Zero element t-conorm")**.**

$$(a \curlyvee 1 \approx 1) = 1$$

Bewijs.

$$\begin{aligned}
a \curlyvee 1 \quad & \approx \langle \text{Def. } \curlyvee \rangle \ \sim (\sim a \curlywedge \sim 1) \\
& \approx \langle \sim 1 = 0 \rangle \ \sim (\sim a \curlywedge 0) \\
& \approx \langle \text{Zero } \curlywedge \rangle \ \sim 0 \\
& \approx \langle \sim 0 = 1 \rangle \ 1
\end{aligned}$$

□

Als laatste van de overeenkomstige eigenschappen tussen de t-norm en de t-conorm tonen we de monotoniciteit aan van deze t-conorm:

Stelling 43 (Mon. $\curlyvee$ "Monotoniciteit t-conorm")**.**

$$(a \leq b) \wedge (c \leq d) \Rightarrow ((a \curlyvee c) \leq (b \curlyvee d))$$

Bewijs.

$$\begin{aligned}
(a \leq b) \wedge (c \leq d) \quad & \Rightarrow \langle \text{Dal. } \sim \rangle \ (\sim a \geq \sim b) \wedge (\sim c \geq \sim d) \\
& \Rightarrow \langle \text{Mon. } \curlywedge \rangle \ \sim a \curlywedge \sim c \geq \sim b \curlywedge \sim d \\
& \Rightarrow \langle \text{Dal. } \sim \rangle \ \sim (\sim a \curlywedge \sim c) \leq \sim (\sim b \curlywedge \sim d) \\
& \equiv \langle \text{Def. } \curlyvee \rangle \ a \curlyvee c \leq b \curlyvee d
\end{aligned}$$

□

Dan hebben we nog enkele stellingen in petto die gelijkaardig zijn aan de verzwakking van de disjunctie in de klassieke logica. Een eerste levert deze eigenschap voor de dubbele negatie:

Stelling 44 (WDN$\curlyvee$ "Verzwakking conorm bij dubbele negatie")**.**

$$\sim (\sim x) \rightsquigarrow x \curlyvee y = 1$$

Bewijs.

$$\begin{aligned}
& \langle \text{W} \curlywedge \rangle \ \sim x \curlywedge \sim y \rightsquigarrow \sim x \\
\rightsquigarrow \ & \langle \text{WCP} \rangle \ \sim (\sim x) \rightsquigarrow \sim (\sim x \curlywedge \sim y) \\
\approx \ & \langle \text{Def. } \curlyvee \rangle \ \sim (\sim x) \rightsquigarrow x \curlyvee y
\end{aligned}$$

□

De tweede versterkings-eigenschap volgt dan heel eenvoudig uit de eerste en het verband dat nog bestaat tussen de dubbele negatie van x en x zelf:

Laagste Prioriteit	**...**				**...**	**Hoogste Prioriteit**
$\equiv$	$=$	$\approx$	$\leq$	$\rightsquigarrow$	$\curlywedge, \curlyvee$	$\sim$

Tabel 3.1: Overzicht van de operator-precedenties (stijgende volgorde)

Stelling 45 (W$\curlyvee$ "Verzwakking $\curlyvee$")**.**

$$x \rightsquigarrow x \curlyvee y = 1$$

Bewijs.

$$\begin{aligned} x \quad & \rightsquigarrow \quad \langle \text{DN} \rangle \quad \sim (\sim x) \\ & \rightsquigarrow \langle \text{IDN}\curlyvee \rangle \; x \curlyvee y \end{aligned}$$

□

We besluiten dit hoofdstuk met een overzicht van alle ingevoerde regels, zonder de impliciet bedoelde $= 1$ te vermelden. In tabel 3.1 vindt u de precedenties van de operatoren terug, van klein naar groot. Het volgende hoofdstuk handelt over hoe we de vaagpredikatenlogica in een calculationeel en functioneel jasje kunnen steken.

Afkorting	Regel
Comm. $\curlywedge$	$a \curlywedge b = b \curlywedge a$
Assoc. $\curlywedge$	$a \curlywedge (b \curlywedge c) = (a \curlywedge b) \curlywedge c$
Eenh. $\curlywedge$	$a \curlywedge 1 = a$
Mon. $\curlywedge$	$(a \leq b) \wedge (c \leq d) \Rightarrow (a \curlywedge c) \leq (b \curlywedge d)$
Zero. $\curlywedge$	$a \curlywedge 0 = 0$
Expl. Def. $\rightsquigarrow$	$x \rightsquigarrow y = \bigvee z : [0,1] \mid x \curlywedge z \leq y$
GC of Impl. Def. $\rightsquigarrow$	$z \leq x \rightsquigarrow y \equiv z \curlywedge x \leq y$
SH$\leq/\rightsquigarrow$	$x \leq y \rightsquigarrow z \equiv y \leq x \rightsquigarrow z$
SH$\Rightarrow/\rightsquigarrow$	$\forall p : [0,1] \,.\, b : \mathbb{B} \,.\, b \Rightarrow (p = 1) \equiv b \rightsquigarrow p = 1$
Eq. $\leq/\rightsquigarrow$	$x \leq y \equiv (x \rightsquigarrow y) = 1$
Eenh. $\curlywedge$	$(1 \rightsquigarrow x) = x$
St 15	$x \geq y \Rightarrow x \curlywedge (x \rightsquigarrow y) = y$
Mon. Cons. $\rightsquigarrow$	$(b \leq c) \Rightarrow (a \rightsquigarrow b \leq a \rightsquigarrow c)$
Antiton. Antec. $\rightsquigarrow$	$(c \leq d) \Rightarrow (d \rightsquigarrow a \leq c \rightsquigarrow a)$
FMP	$x \curlywedge (x \rightsquigarrow y) \rightsquigarrow y$
SH$\rightsquigarrow$	$x \rightsquigarrow y \rightsquigarrow z = y \rightsquigarrow x \rightsquigarrow z$
T$\rightsquigarrow$	$(x \rightsquigarrow y) \rightsquigarrow (y \rightsquigarrow z) \rightsquigarrow (x \rightsquigarrow z)$
R$\rightsquigarrow$	$x \rightsquigarrow x$
W$\rightsquigarrow$	$x \rightsquigarrow y \rightsquigarrow x$
SH$\curlywedge/\rightsquigarrow$	$x \rightsquigarrow y \rightsquigarrow z = x \curlywedge y \rightsquigarrow z$
W$\curlywedge$	$x \curlywedge y \rightsquigarrow x$
AC$\curlywedge$	$x \rightsquigarrow y \rightsquigarrow x \curlywedge y$
I$\rightsquigarrow/\curlywedge$	$(x \rightsquigarrow y) \rightsquigarrow (x \curlywedge z) \rightsquigarrow (y \curlywedge z)$
EFMP	$(x \rightsquigarrow y) \curlywedge x \curlywedge z \rightsquigarrow y \curlywedge z$
ME$\rightsquigarrow$	$(x \rightsquigarrow y) \curlywedge (z \rightsquigarrow u) \rightsquigarrow (x \curlywedge z) \rightsquigarrow (y \curlywedge u)$
Def. $\approx$	$a \approx b = (a \rightsquigarrow b) \curlywedge (b \rightsquigarrow a)$
R$\approx$	$x \approx x$
S$\approx$	$(x \approx y) \rightsquigarrow (y \approx x)$
T$\approx$	$(x \approx y) \curlywedge (y \approx z) \rightsquigarrow (x \approx z)$
	Vervolg op volgende pagina ...

Tabel 3.2: Overzicht van de ingevoerde rekenregels

Afkorting	**Regel**
W$\approx$	$(x \approx y) \rightsquigarrow (x \rightsquigarrow y)$
I$\approx$	$(x \approx y) \rightsquigarrow (x \curlywedge z \approx y \curlywedge z)$
I$\approx$/$\rightsquigarrow$	$x \approx y \rightsquigarrow x \rightsquigarrow z \approx y \rightsquigarrow z$
Def. $\sim$	$\sim x = x \rightsquigarrow 0$
Dal. $\sim$	$(a \leq b) \Rightarrow (\sim b \leq \sim a)$
DN	$x \rightsquigarrow \sim (\sim x)$
WCP$\rightsquigarrow$/$\sim$	$(x \rightsquigarrow y) \rightsquigarrow (\sim y \rightsquigarrow \sim x)$
Def. $\curlyvee$	$a \curlyvee b = \sim (\sim a \curlywedge \sim b)$
Comm. $\curlyvee$	$a \curlyvee b = b \curlyvee a$
Eénh. $\curlyvee$	$a \curlyvee 0 = \sim (\sim a)$
Zero $\curlyvee$	$a \curlyvee 1 = 1$
Mon. $\curlyvee$	$(a \leq b) \wedge (c \leq d) \Rightarrow (a \curlyvee c) \leq (b \curlyvee d)$
WDN$\curlyvee$	$\sim (\sim x) \rightsquigarrow x \curlyvee y$
W$\curlyvee$	$x \rightsquigarrow x \curlyvee y$

Tabel 3.2: Overzicht rekenregels – vervolg

Hoofdstuk 4

Functionele vaagpredikatenlogica

4.1 Inleiding

We hebben reeds een vaagpropositielogica uitgewerkt die gebruikmaakt van de calculationele stijl om bewijsvoeringen te construeren (of veeleer te "berekenen"). Propositielogica op zich is echter niet doeltreffend genoeg om zaken uit het dagelijkse leven te modelleren. Beschouwen we bijvoorbeeld een groep vogels, dan kunnen we met behulp van de propositielogica niet afleiden dat "niet alle vogels vliegen" logisch equivalent is met "sommige vogels vliegen niet". Dergelijke uitspraken zijn echter dagelijkse kost en als we met logica menselijke redeneringen wensen te structureren en modelleren hebben we nood aan een krachtiger afleidingsmechanisme. Dit mechanisme wordt ons gegeven door de klassieke predikatenlogica. De klassieke predikatenlogica voert het begrip "predikaat" en meestal ook het begrip "kwantificatie" in. Predikaten zijn in principe functies die objecten afbeelden op "waar" als ze de eigenschap die we met het predikaat wensen te beschrijven bezitten en vals als ze deze niet bezitten. Als voorbeeld kunnen we de eigenschap "draagt een bril" beschouwen. Stel dat we twee personen hebben, waarvan de eerste een bril draagt en de tweede niet, dan is het predikaat dat deze eigenschap beschrijft een functie die de eerste persoon afbeeldt op waar en de tweede op vals. Kwantoren zijn functies die een bepaald predikaat beschouwen en deze afbeelden op een waarheidswaarde. Een voorbeeld is de "voor alle"-kwantor. Deze kwantor beeldt een predikaat af op de waarheidswaarde "waar" wanneer alle objecten uit het domein van het predikaat (een predikaat is een functie en heeft bijgevolg een domein) aan het predikaat voldoen.

De klassieke predikatenlogica heeft echter ook zijn gebreken. Zo is het mogelijk om tot paradoxen te komen, zoals de welgekende Soritesparadox ([eoP97]). In deze paradox (die onder verscheidene vormen terug te vinden is) wordt de vraag gesteld wanneer een heleboel zand een "hoop" is. De modellering die men ervan maakt is recursief: men stelt dat iets een "hoop" is, wanneer er geldt dat bij het verwijderen van een zandkorrel de hoop nog steeds een hoop is. Uit deze formulering valt echter af te leiden dat een lege tegel ook een hoop is, iets wat zeker niet gewenst is.

Om dergelijke concepten logisch te modelleren werd de vaagpredikatenlogica ontworpen. Deze laat in eerste instantie toe dat bepaalde elementen slechts gedeeltelijk voldoen aan een eigenschap, iets wat veel natuurlijker is voor de mens. In tweede instantie laat deze logica toe om te redeneren over een grote groep objecten en er uitspraken over af te leiden die in een bepaalde mate waar zijn, dit door middel van vaagkwantificatie.

In dit hoofdstuk trachten we een formulering van vaagpredikatenlogica op te bouwen die ons toelaat om op een calculationele manier zaken te bewijzen. In het eerste deel definiëren we de vaagpredikaten en voegen we enkele zaken in die het bewijsleven gemakkelijker kunnen maken. Dan gaan we verder met de introductie van de vaagkwantoren en hun eigenschappen, gebaseerd op de logica uit het werk van P. Hájek [Háj98]. We vergelijken ook enkele vaaglogische bewijzen met bewijzen die gebruikmaken van ordetheorie (die we bewijzen met behulp van de calculationele klassieke logica). Bewijzen die gebruik maken van ordetheorie zijn immers de gangbare manier om bewijsvoeringen te construeren in de vaaglogica en zodoende toont een dergelijke vergelijking mooi de voordelen van onze calculationele vaaglogica ten opzichte van de huidige manier van werken aan. Afsluiten doen we met een overzicht van de geïntroduceerde rekenregels.

Zoals in hoofdstuk 3 ligt de nadruk hier niet op het construeren van zoveel mogelijk rekenregels, maar op het construeren van een calculationele en getypeerde vaagpredikatenlogica. Dit is enigszins in contrast met de mogelijkheid om dit raamwerk in te zetten voor praktisch gebruik, maar de opzet van dit eindwerk is, zoals reeds eerder vermeld, om een eerste stap naar dit doel te zetten en is geenszins bedoeld als een eindpunt.

4.2 Vaagpredikaten

4.2.1 Definitie

Definitie. *Een* ***vaagpredikaat*** *is een functie die een waarde aanneemt in het interval* $[0, 1]$*. Formeel kunnen we schrijven dat een vaagpredikaat* P *gekarakteriseerd wordt door* $x \in \mathcal{D}\, P \Rightarrow P\, x \in [0, 1]$.

Gelijkaardig aan [Bou05b] gebruiken we FPred ("fuzzy predicates") voor de verzameling predikaten die zich "goed gedragen" (dit betekent dat ze geen contradicties veroorzaken als we ze opnemen in de verzameling FPred).

Merk op dat we hier aan vaagpredikaten een zeker domein hechten. We creëeren dus een "getypeerde" vaagpredikatenlogica, waar predikaten niet allemaal hetzelfde domein X bezitten, zoals wel het geval is bij ondermeer [Háj98]. Om vaagpredikatenlogica te gebruiken bij het modelleren van alledaagse zaken bieden typeringen echter zeer handige controlemechanismen om zinloze uitdrukkingen te vermijden. Beschouwen we bijvoorbeeld het predikaat "heeft groene ogen", dan is het zinvol om dit op personen of dieren toe te passen, maar heeft het predikaat toegepast op bijvoorbeeld een huis, geen zinvolle betekenis. Om dergelijke zaken te vermijden en de toepasbaarheid te verhogen, hebben we geopteerd om onze vaagpredikaten te typeren.

4.2.2 Enkele begrippen

We voeren enkele begrippen en bijhorende operatoren in, die zullen inwerken op vaagpredikaten. Deze zijn te vinden in tabel 4.1. We noteren ze in de puntvrije stijl (dit is een stijl waar men de zogenaamde "dummie-variabelen" weglaat, bv. $\forall\, P$ is de puntvrije versie van $\forall\, x : X\,.\, P\, x$), de reden hiervoor is dat de puntvrije stijl vaak elegantere formuleringen en bewijsvoeringen toelaat (zie ondermeer ook [Oli05; Bou03]). Omwille van de mogelijke verwarring die deze stijl echter teweeg kan brengen bij personen die er minder met vertrouwd zijn zullen we, analoog aan [Bou05b], een overdreven gebruik mijden. De operatoren in tabel 4.1 zijn tevens predikatenomvormers. De reden hiervoor is dat, zoals reeds opgemerkt in hoofdstuk 2, formuleringen met predikaten in ons formalisme waar alles zoveel mogelijk wordt beschreven door functies, de voorkeur geniet ten opzichte van verzamelingen. Als voorbeeld van een eleganter bewijs door middel van de puntvrije stijl bewijzen we volgende stelling uit [Ker06] puntvrij:

$$\mathrm{zan}_\alpha(1 \overset{\rightharpoonup}{-} P) = 1 \overset{\rightharpoonup}{-} \mathrm{san}_{1-\alpha}\ P$$

Naam	**Symbool**	**Type**	**Beelddefinitie**
Kern	ker	$\mathsf{FPred} \to \mathsf{Pred}$	$\mathrm{ker} = \overline{(=1)}$
Ondersteuning	supp	$\mathsf{FPred} \to \mathsf{Pred}$	$\mathrm{supp} = \overline{>0}$
Plint	plt	$\mathsf{FPred} \to [0,1]$	$\mathrm{plt} = \bigwedge$
Hoogte	hgt	$\mathsf{FPred} \to [0,1]$	$\mathrm{hgt} = \bigvee$
Zwak alfa-niveau	zan_{-0}	$]0,1] \to \mathsf{FPred} \to \mathsf{Pred}$	$\mathrm{zan}_\alpha = \overline{\geq \alpha}$
Sterk alfa-niveau	san_{-0}	$[0,1[\to \mathsf{FPred} \to \mathsf{Pred}$	$\mathrm{san}_\alpha = \overline{> \alpha}$
Alfa-product	prod_{-0}	$[0,1] \to \mathsf{FPred} \to \mathsf{Pred}$	$\mathrm{prod}_\alpha = \overline{(\cdot \alpha)}\ \mathrm{zan}_\alpha$

Tabel 4.1: Basisbegrippen in verband met vaagpredikaten

Bewijs.

$$
\begin{array}{rcl}
1 \stackrel{\rightharpoonup}{-} \mathrm{san}_{1-\alpha}\ P = & \langle \text{Def. san} \rangle & 1 \stackrel{\rightharpoonup}{-} (\overline{(> 1-\alpha)}\ P) \\
= & \langle \overline{(\star a)}\ f = f \stackrel{\leftharpoonup}{\star} a \rangle & 1 \stackrel{\rightharpoonup}{-} (P \stackrel{\leftharpoonup}{>} 1-\alpha) \\
= & \langle (1-)\rceil \mathbb{B} = \neg \rangle & \overline{\neg}\,(P \stackrel{\leftharpoonup}{>} 1-\alpha) \\
= & \langle \neg(a > b) \equiv a \leq b \rangle & P \stackrel{\leftharpoonup}{\leq} 1-\alpha \\
= & \langle x \leq y - z \equiv y - x \geq z \rangle & 1 \stackrel{\rightharpoonup}{-} P \stackrel{\leftharpoonup}{\geq} \alpha \\
= & \langle \overline{\star a}\, f = f \stackrel{\leftharpoonup}{\star} a \rangle & \overline{(\geq \alpha)}\,(1 \stackrel{\rightharpoonup}{-} P) \\
= & \langle \text{Def. zan} \rangle & \mathrm{zan}_\alpha(1 \stackrel{\rightharpoonup}{-} P)
\end{array}
$$

□

Merk vooral de analogie met een puntsgewijs bewijs voor dezelfde eigenschap voor punten op. We werken hier met het predikaat P op dezelfde manier als we met een punt x zouden werken mochten we voor dit punt $1-(x > 1-\alpha) = 1-P \geq \alpha$ wensen te bewijzen (op enkele overgangen van definities na).

Dat de eigenschappen voor gewone ordetheorie die we als “hints” in het bewijs gebruikten ook gelden wanneer men de directe uitbreidings-functionalen gebruikt, kan gemakkelijk aangetoond worden door over te gaan op puntsgewijze vormen, maar dit is een éénmalige stap: eenmaal vastgesteld kan dit feit voortaan gebruikt worden zonder op het puntsgewijs bewijs terug te komen.

4.3 Vaagkwantoren

4.3.1 Definities

We zullen hier enkel de vaaguitbreidingen van de existentiële en de universele kwantor door middel van de supremum- en infimumfunctie beschouwen. De reden hiervoor is dat deze enerzijds het meest gebruikt worden en anderzijds omdat hiervan een axiomatisatie bestaat in [Háj98]. Er bestaan naast deze vaaguitbreidingen ook nog andere kwantificeerfuncties, zoals de "concentratie" en "dilatatie"-operatoren, die gebruikt worden om begrippen zoals "zeer" (concentratie-operator) en "min of meer" (dilatatie-operator) te modelleren. Tevens bestaan er axiomatisaties voor dergelijke kwantoren [Glö]. Ook deze zullen we hier niet onmiddellijk beschouwen, omdat we ons wensen te focussen op bruikbare rekenregels voor de veralgemening van de existentiële en universele kwantor.

De definities worden dus:

Definitie (Universele vaagkwantor)**.** $\bigwedge$

Definitie (Existentiële vaagkwantor)**.** $\bigvee$

Merk op dat deze vaagkwantoren, toegepast op een vaagpredikaat, neerkomen op het nemen van de plint, respectievelijk de hoogte van het vaagpredikaat. Een eerste toepassing van deze definities is berekenen wat het gedrag bij constante functies is:

Stelling 46 (Universele en existentiële vaagkwantor bij constante functies)**.** *Stel* $p : [0,1]$*, dan:*

$$\bigwedge (X^{\bullet} p) = p \vee (X = \emptyset) \text{ } en \text{ } \bigvee (X^{\bullet} p) = p \wedge (X \neq \emptyset)$$

Bewijs. We bewijzen dit via de geïnduceerde gelijkheid (GG). Voor willekeurige $z : [0,1]$ geldt:

$$\begin{array}{rclc}
z \leq \bigwedge (X^{\bullet} p) & \equiv & \langle \text{St. } \bigwedge \rangle & \forall\, x : X \,.\, z \leq (X^{\bullet} p)\, x \\
& \equiv & \langle \text{Def. } X^{\bullet} p \rangle & \forall\, x : X \,.\, z \leq p \\
& \equiv & \langle \forall (X^{\bullet} s) \equiv (X = \emptyset) \vee s \rangle & (X = \emptyset) \vee (z \leq p) \\
& \equiv & \langle \text{Lemma 6} \rangle & z \leq ((X = \emptyset) \vee p)
\end{array}$$

Waardoor we kunnen concluderen dat het gestelde geldt. Het bewijs voor de existentiële vaagkwantor bekomt men aan de hand van de dualiteit tussen de twee operatoren. □

Het lemma luidt:

Lemma 6. *Voor* $a : \mathbb{B}$, $b, c : [0,1]^2$ *geldt:*

$$a \vee (b \leq c) \equiv b \leq (a \mathbin{\forall} c)$$

Bewijs. We bewijzen dit door een gevallenonderzoek. Eerst voor $a = 0$:

$$\begin{aligned} a \vee (b \leq c) \equiv b \leq (a \mathbin{\forall} c) \quad & \equiv \langle 0 \vee x = x,\, 0 \mathbin{\forall} c = c \rangle \;\; b \leq c \equiv b \leq c \\ & \equiv \quad \langle a \equiv a \equiv 1 \rangle \quad 1 \end{aligned}$$

Het tweede geval, $a = 1$ volgt dan uit:

$$\begin{aligned} a \vee (b \leq c) \equiv b \leq (a \mathbin{\forall} c) \quad & \equiv \langle 1 \vee x = 1,\, 1 \mathbin{\forall} x = 1 \rangle \;\; 1 \equiv b \leq 1 \\ & \equiv \quad \langle 1 \text{ gr. elt.} \rangle \quad 1 \equiv 1 \\ & \equiv \quad \langle a \equiv a \equiv 1 \rangle \quad 1 \end{aligned}$$

□

Deze eigenschap kunnen we nu ondermeer gebruiken om het gedrag van deze kwantoren bij de lege functie te bepalen. Enerzijds krijgen we dan $\bigwedge \varepsilon = 1$ en anderzijds $\bigvee \varepsilon = 0$.

4.3.2 De Axioma's van Hájek voor vaagkwantoren als stellingen

De stellingen die we hier zullen invoeren en bewijzen zijn, net zoals bij de vaagpropositielogica, equivalent met de axioma's en inferentieregels uit [Háj98]. Een eerste rekenregel is de vaaginstantiatie, die ons toelaat om een universele kwantor te instantiëren met een bepaald element uit zijn domein.

Stelling 47 (FINS "Vaaginstantiatie")**.**

$$\bigwedge P \rightsquigarrow x \in \mathcal{D}\, P \rightsquigarrow P\, x = 1$$

Bewijs. Stel $f := P$, dan:

$$\begin{aligned} 1 \quad & \equiv \langle \text{St. } \bigwedge \text{b} \rangle \;\; \forall x : \mathcal{D}\, P \,.\, \bigwedge P \leq P\, x = 1 \\ & \equiv \langle \text{Eq. } \leq / \rightsquigarrow \rangle \;\; \forall x : \mathcal{D}\, P \,.\, \bigwedge P \rightsquigarrow P\, x = 1 \\ & \Rightarrow \langle \text{Instant. } x \rangle \;\; x \in \mathcal{D}\, P \Rightarrow (\bigwedge P \rightsquigarrow P\, x = 1) \\ & \equiv \langle \text{SH} \leq / \rightsquigarrow \rangle \;\; x \in \mathcal{D}\, P \rightsquigarrow \bigwedge P \rightsquigarrow P\, x = 1 \\ & \equiv \langle \text{SH} \rightsquigarrow \rangle \;\; \bigwedge P \rightsquigarrow x \in \mathcal{D}\, P \rightsquigarrow P\, x = 1 \end{aligned}$$

□

Het gebruikte lemma is een direct gevolg van stelling $\bigwedge$ bis en de equivalentiestelling van $\leq$ en $\rightsquigarrow$ (in de bijgeleverde tabel vindt u deze eigenschappen terug als "St. $\bigwedge$ b" en "Eq. $\leq/\rightsquigarrow$").

Lemma 7.

$$\forall f : \mathsf{fam}\,[0,1] \,.\, \forall x : \mathcal{D}\, f \,.\, \bigwedge f \rightsquigarrow f\, x = 1$$

Vervolgens hebben we de generalisatie, die ons toelaat om bij een predikaat dat waar is voor alle elementen uit zijn domein, de universele kwantor voor het predikaat te plaatsen. Normaliter wordt dit ingevoerd als een inferentieregel. Daar we hier vertrekken van een algebra poneren we deze als een rekenregel, die equivalent is aan de inferentieregel uit [Háj98].

Stelling 48 (FGEN "Vaaggeneralisatie")**.** *Als* x $q \rightsquigarrow x \in \mathcal{D}\, P \rightsquigarrow P\, x = 1$ *voor willekeurige* x*, dan geldt* $q \rightsquigarrow \bigwedge P = 1$

Bewijs. Het bewijs volgt uit "Stelling $\bigwedge$", met $f := P$ en $y := q$:

$$\begin{array}{lll}
1 & \equiv \langle \text{Onderst.} \rangle & q \rightsquigarrow x \in \mathcal{D}\, P \rightsquigarrow P\, x = 1 \\
 & \equiv \langle \text{SH}\rightsquigarrow \rangle & x \in \mathcal{D}\, P \rightsquigarrow q \rightsquigarrow P\, x = 1 \\
 & \equiv \langle \text{SH}\Rightarrow/\rightsquigarrow \rangle & x \in \mathcal{D}\, P \Rightarrow (q \rightsquigarrow P\, x = 1) \\
 & \Rightarrow \langle \text{Veralg. } \forall \rangle & \forall x : \mathcal{D}\, P \,.\, q \rightsquigarrow P\, x = 1 \\
 & \equiv \langle \text{Eq. } \leq/\rightsquigarrow \rangle & \forall x : \mathcal{D}\, P \,.\, q \leq P\, x \\
 & \equiv \langle \text{Stell. } \bigwedge \rangle & q \leq \bigwedge P \\
 & \equiv \langle \text{Eq. } \leq/\rightsquigarrow \rangle & q \rightsquigarrow \bigwedge P = 1
\end{array}$$

□

Opgelet! Het gebruik van FGEN in een calculationeel bewijs schrijven we neer als:

$$\begin{array}{lll}
q & \rightsquigarrow \langle \text{Verantwoordingen} \rangle & [p \rightsquigarrow]\, x \in \mathcal{D}\, P \rightsquigarrow P\, x \\
 & \rightsquigarrow \qquad \langle \text{FGEN} \rangle & [p \rightsquigarrow]\, \bigwedge P
\end{array}$$

met $[p \rightsquigarrow]$ optioneel. In de tweede stap van dit bewijs hebben we echter *niet* de transitiviteit gebruikt met de (foutieve) vaagimplicatie $x \in \mathcal{D}\, P \rightsquigarrow P\, x \rightsquigarrow \bigwedge P$, maar wel de rekenregel FGEN!

Een duale regel van de instantiatie van de universele vaagkwantor is dan de introductieregel, die toelaat om een $\bigvee$ in te voegen in een bewijsstap:

Stelling 49 ($\bigvee$ IN "$\bigvee$-introductie")**.**

$$x \in \mathcal{D}\,P \curlywedge P\,x \rightsquigarrow \bigvee P = 1$$

Bewijs.

$$\begin{array}{lll} 1 & \equiv \langle \text{St. } \bigvee \text{b} \rangle & \forall x : \mathcal{D}\,P \,.\, P\,x \rightsquigarrow \bigvee P = 1 \\ & \Rightarrow \langle \text{Instant. } x \rangle & x \in \mathcal{D}\,P \Rightarrow (P\,x \rightsquigarrow \bigvee P = 1) \\ & \equiv \langle \text{SH}{\leq}/{\rightsquigarrow} \rangle & x \in \mathcal{D}\,P \rightsquigarrow P\,x \rightsquigarrow \bigvee P = 1 \\ & \equiv \langle \text{SH}{\rightsquigarrow}/{\curlywedge} \rangle & x \in \mathcal{D}\,P \curlywedge P\,x \rightsquigarrow \bigvee P = 1 \end{array}$$

□

Hoewel het niet in onze bedoeling lag om te onderzoeken welke axioma's uit [Háj98] eventueel overbodig zijn, stootten we tijdens het bewijzen van de volgende rekenregel, die geponeerd werd als axioma in [Háj98], op het feit dat deze volledig kan bewezen worden aan de hand van generalisatie en instantiatie:

Stelling 50.

$$\bigwedge (q \overrightarrow{\rightsquigarrow} P) \rightsquigarrow q \rightsquigarrow \bigwedge P = 1$$

Bewijs.

$$\begin{array}{llll} \bigwedge (q \overrightarrow{\rightsquigarrow} P) & \rightsquigarrow & \langle \text{FINS} \rangle & x \in \mathcal{D}\,(q \overrightarrow{\rightsquigarrow} P) \rightsquigarrow q \rightsquigarrow P\,x \\ & \approx & \langle \mathcal{D}\,(q \overrightarrow{\rightsquigarrow} P) = \mathcal{D}\,P \rangle & x \in \mathcal{D}\,P \rightsquigarrow q \rightsquigarrow P\,x \\ & \approx & \langle \text{SH}{\rightsquigarrow} \rangle & q \rightsquigarrow x \in \mathcal{D}\,P \rightsquigarrow P\,x \\ & \rightsquigarrow & \langle \text{FGEN,T}{\rightsquigarrow} \rangle & q \rightsquigarrow \bigwedge P \end{array}$$

□

Deze regel blijkt in twee richtingen geldig te zijn, de andere richting staat bewezen in sectie 4.3.3. We noemen dit soort regels distributiviteitsregels van $\rightsquigarrow$ over de betreffende vaagkwantor. Deze naam volgt uit het feit dat als we $P := (p, s)$ met $p, s : [0,1]^2$ stellen en een $q : [0,1]$ nemen, het bovenstaande theorema de vorm $(q \rightsquigarrow p) \curlywedge (q \rightsquigarrow s) \rightsquigarrow q \rightsquigarrow (p \curlywedge s)$ krijgt (waar we gebruik maken van het feit dat $\bigwedge$ een variadische uitbreiding is van de infix-operator $\curlywedge$). Deze laatste vorm vertoont duidelijk een sterke analogie met andere distributiviteitsregels zoals bv. de distributiviteit van $\curlywedge$ over $\curlyvee$, gegeven door $(a \curlywedge b) \curlyvee (a \curlywedge c) = a \curlywedge (b \curlyvee c)$.

Een tweede distributiviteitsregel toont een verband tussen de universele en de existentiële kwantor. Dankzij deze regel mogen we, wanneer een predikaat in het antecedent staat van een vaagimplicatie die in het bereik van een universele kwantor staat, de universele kwantor omwisselen voor een existentiële die enkel het antecedent als bereik heeft. In formulevorm wordt dit:

Stelling 51.

$$\bigwedge (P \overleftarrow{\rightsquigarrow} q) = \bigvee P \rightsquigarrow q$$

Bewijs. Het bewijs gebeurt via een geïnduceerde gelijkheid, hiermee bedoelen we het verband:

$$\forall\, z : X \,.\, z \preceq x \equiv z \preceq y \equiv z = y$$

dat terug te vinden is in hoofdstuk 2.

$$\begin{array}{rcll}
z \leq \bigwedge (P \overleftarrow{\rightsquigarrow} q) & \equiv & \langle \text{St. } \bigwedge \rangle & \forall\, x : \mathcal{D}\,(P \overleftarrow{\rightsquigarrow} q) \,.\, z \leq (P \overleftarrow{\rightsquigarrow} q)\, x \\
 & \equiv & \langle \text{Def. } \overleftarrow{\;.\;} \rangle & \forall\, x : \mathcal{D}\, P \,.\, z \leq P\, x \rightsquigarrow q \\
 & \equiv & \langle \text{Shunt. } \leq / \rightsquigarrow \rangle & \forall\, x : \mathcal{D}\, P \,.\, P\, x \leq z \rightsquigarrow q \\
 & \equiv & \langle \text{St. } \bigvee \rangle & \forall\, x : \mathcal{D}\, P \,.\, \bigvee P \leq z \rightsquigarrow q \\
 & \equiv & \langle \text{Shunt. } \leq / \rightsquigarrow \rangle & z \leq \bigvee P \rightsquigarrow q
\end{array}$$

□

Dan komen we ten slotte aan bij het laatste axioma dat Hájek poneerde en dat een verband geeft tussen de max-operator en de universele vaagkwantor:

Stelling 52.

$$\bigwedge (P \overleftarrow{\mathbin{\vee\!\!\!|}} q) = \bigwedge P \mathbin{\vee\!\!\!|} q$$

Bewijs. We zullen hier wederom gebruik maken van de geïnduceerde gelijkheid om deze uitdrukking te bewijzen:

$$\begin{array}{rcll}
z \leq \bigwedge (P \overleftarrow{\mathbin{\vee\!\!\!|}} q) & \equiv & \langle \text{St. } 5 \rangle & \forall\, x : \mathcal{D}\,(P \overleftarrow{\mathbin{\vee\!\!\!|}} q) \,.\, z \leq (P \overleftarrow{\mathbin{\vee\!\!\!|}} q)\, x \\
 & \equiv & \langle \text{Def. } \overleftarrow{\;.\;} \rangle & \forall\, x : \mathcal{D}\, P \,.\, z \leq P\, x \mathbin{\vee\!\!\!|} q \\
 & \equiv & \langle \text{Eig. } \mathbin{\vee\!\!\!|} \rangle & \forall\, x : \mathcal{D}\, P \,.\, z \leq P\, x \,\vee\, z \leq q \\
 & \equiv & \langle \text{Distrib. } \vee / \forall \rangle & \forall\, (x : \mathcal{D}\, P \,.\, z \leq P\, x) \,\vee\, z \leq q \\
 & \equiv & \langle \text{St. } 5 \rangle & z \leq \bigwedge P \,\vee\, z \leq q \\
 & \equiv & \langle \text{Eig. } \mathbin{\vee\!\!\!|} \rangle & z \leq \bigwedge P \mathbin{\vee\!\!\!|} q
\end{array}$$

□

In dit bewijs hebben we gebruik gemaakt van "Eig. $\curlyvee$", dit is de volgende eigenschap: $z \leq x \curlyvee y \equiv z \leq x \ \vee \ z \leq y$. De eigenschap Distrib. $\vee/\forall$ is: $\forall\,(P \overleftarrow{\vee}\, q) \equiv \forall\,P \ \vee \ q$.

Hiermee besluiten we het bewijzen van de axioma's van Hájek. In het verdere deel van dit hoofdstuk zullen we ons concentreren op het ontwikkelen van bruikbare rekenregels, die we trachten te bewijzen met onze calculationele vaaglogica. Voor enkele bewijzen geven we ook een vergelijking met ordetheoretische bewijzen. Dit als een soort "vergelijkende test" tussen de bewijsmethodiek die wij vooropstellen en de meer gebruikelijkere manier van bewijsvoeren in de vaaglogische wereld.

4.3.3 Rekenregels

Alle distributieve rekenregels uit de vorige sectie zijn eigenlijk gelijkheden. Van enkele hebben we dit dan ook reeds aangetoond. We presenteren nu, bij wijze van bruikbare stijlvoorbeelden en om onze bibliotheek van regels uit te breiden, de andere richting van de vaagequivalentie voor deze rekenregels.

De eerste distributieve regel laat ons toe om de vaagequivalentie te behouden als we de vaagkwantor "naar binnen" of "naar buiten" brengen bij een vaagpredikaat dat in het consequent van een vaagimplicatie staat. We hadden reeds één richting vooropgesteld bij sectie 4.3.2. De volledige rekenregel wordt nu:

Stelling 53 (LD$\rightsquigarrow/\bigwedge$ "Linksdistributiviteit $\rightsquigarrow/\bigwedge$").

$$\bigwedge\,(q \overrightarrow{\rightsquigarrow} P) \approx (q \rightsquigarrow \bigwedge P) = 1$$

Bewijs. $\bigwedge\,(q \overrightarrow{\rightsquigarrow} P) \rightsquigarrow q \rightsquigarrow \bigwedge P = 1$ werd reeds bewezen, dus rest ons nog het volgende bewijs:

$$\begin{array}{lll}
q \rightsquigarrow \bigwedge P & \rightsquigarrow \quad \langle \text{FINS,T}\rightsquigarrow \rangle & q \rightsquigarrow x \in \mathcal{D}\,P \rightsquigarrow P\,x \\
& \approx \langle \mathcal{D}\,(q \overrightarrow{\rightsquigarrow} P) = \mathcal{D}\,(P) \rangle & q \rightsquigarrow x \in \mathcal{D}\,(q \overrightarrow{\rightsquigarrow} P) \rightsquigarrow P\,x \\
& \approx \quad \langle \text{SH}\rightsquigarrow \rangle & x \in \mathcal{D}\,(q \overrightarrow{\rightsquigarrow} P) \rightsquigarrow q \rightsquigarrow P\,x \\
& \rightsquigarrow \quad \langle \text{FGEN} \rangle & \bigwedge\,(q \overrightarrow{\rightsquigarrow} P)
\end{array}$$

□

Merk de eenvoudige bewijsstijl op: van instantiatie naar generalisatie. Dit vertoont een sterke analogie met de klassieke logica, waar deze bewijsmethode in het opstellen van bewijzen voor basisregels ook frequent voorkomt. Dezelfde opmerking als bij de klassieke logica is hier echter van belang: bewijzen met instantiatie en generalisatie dienen enkel als een opstapje om onze logica op te bouwen. Wanneer we de basisregels voor kwantoren tot onze beschikking hebben, zullen we dergelijke bewijzen schuwen. De reden hiervoor is dat we dan equationeel kunnen redeneren. Dit betekent dat we bewijzen als een ketting van equivalenties (door exclusief gebruik te maken van regels die equivalenties behouden), in plaats van implicaties, wat tot kortere en overzichtelijkere bewijzen leidt tegenover het splitsen van een equivalentie in twee apart te bewijzen implicaties. Op het einde van dit hoofdstuk zullen we reeds een deel van deze basisregels tot onze beschikking hebben, in het kader van dit afstudeerwerk konden we echter niet alle basisregels opnemen en bewijzen. Equationele bewijzen met behulp van vaaglogica ontbreken dan ook omwille van die reden.

We bieden ter vergelijking een bewijs dat op een calculationele manier gebruik maakt van ordetheorie om de voorgaande stelling te bewijzen. Dit bewijs is even duidelijk als het bewijs dat gebruik maakt van de vaaglogica, maar abstraheert minder van de onderliggende structuur door niet exclusief gebruik te maken van de vaaglogische operatoren. Tevens heeft het vaaglogisch bewijs als extra voordeel dat het een grote gelijkenis vertoont met een klassiek logisch bewijs, wat vertrouwdheid bevordert.

Bewijs. We bewijzen deze stelling via de geïnduceerde gelijkheid (GG in de tabel met stellingen).

$$
\begin{aligned}
z \le \bigwedge (q \overrightarrow{\rightsquigarrow} P) \quad &\equiv \langle \text{St. } \bigwedge \rangle \quad \forall\, x : \mathcal{D}\,(q \overrightarrow{\rightsquigarrow} P) \,.\, z \le (q \overrightarrow{\rightsquigarrow} P)\, x \\
&\equiv \langle \text{Def. } \overrightarrow{.} \rangle \quad \forall\, x : \mathcal{D}\, P \,.\, z \le q \rightsquigarrow P\, x \\
&\equiv \langle \text{GC} \rangle \quad \forall\, x : \mathcal{D}\, P \,.\, z \curlywedge q \le P\, x \\
&\equiv \langle \text{St. } \bigwedge \rangle \quad z \curlywedge q \le \bigwedge P \\
&\equiv \langle \text{GC} \rangle \quad z \le q \rightsquigarrow \bigwedge P
\end{aligned}
$$

□

De volgende stelling hebben we reeds volledig bewezen in sectie 4.3.2. We leveren hier ter illustratie een bewijs voor één richting van de vaagimplicatie in onze vaagcalculationele stijl:

Stelling 54 (RD$\rightsquigarrow$/$\bigvee$ "Rechtsdistributiviteit $\rightsquigarrow$/$\bigvee$")**.**

$$\bigwedge (P \overleftarrow{\rightsquigarrow} q) \approx \bigvee P \rightsquigarrow q = 1$$

Bewijs.

$$
\begin{array}{lcl}
 & \langle \Vee \mathrm{IN} \rangle & x \in \mathcal{D}\, P \curlywedge P\, x \leadsto \Vee P \\
\leadsto & \langle \mathrm{T}{\leadsto} \rangle & (\Vee P \leadsto q) \leadsto (x \in \mathcal{D}\, P \curlywedge P\, x \leadsto q) \\
\approx & \langle \mathrm{SH}{\leadsto}/{\curlywedge} \rangle & (\Vee P \leadsto q) \leadsto (x \in \mathcal{D}\, P \leadsto P\, x \leadsto q) \\
\approx & \langle \mathcal{D}\, P = \mathcal{D}\, (P \overleftarrow{\leadsto} q) \rangle & (\Vee P \leadsto q) \leadsto (x \in \mathcal{D}\, (P \overleftarrow{\leadsto} q) \leadsto P\, x \leadsto q) \\
\leadsto & \langle \mathrm{FGEN,T}{\leadsto} \rangle & (\Vee P \leadsto q) \leadsto \Wedge (P \overleftarrow{\leadsto} q)
\end{array}
$$

□

We zien dat het minder werk vereist om deze basisregel te bewijzen met behulp van een ordetheoretisch bewijs (zie sectie 4.3.2) dan met een vaaglogisch bewijs. De reden hiervoor is dat het ordetheoretisch bewijs gebruik kan maken van de equationele regels voor de klassieke logica en de ordetheorie, waardoor het beknopter wordt. Dit in tegenstelling tot het vaaglogisch bewijs, dat gebruik moet maken van instantiatie en generalisatie, door het ontbreken van equationele rekenregels. Zoals reeds vermeld kunnen we echter, wanneer we alle basisregels tot onze beschikking hebben, ook equationeel redeneren met behulp van de vaaglogica, waardoor het vermoeden rijst dat beide bewijsstijlen even beknopt en duidelijk zullen worden. De bewijzen met behulp van de ordetheorie kan men dan ook, net zoals de bewijzen met behulp van de instantiatie en de generalisatie, gebruiken als een opstapje voor onze vaaglogica.

Tot slot hebben we nog enkele distributiviteitsregels die geen equivalenties veroorzaken. Een eerste is analoog aan de linkse distributiviteit voor $\leadsto$ en $\Wedge$, maar dan voor $\leadsto$ en $\Vee$. Jammer genoeg blijkt deze eigenschap zwakker te zijn dan voornoemde.

Stelling 55 (LD$\leadsto/\Vee$ "Linksdistributiviteit $\leadsto/\Vee$")**.**

$$\Vee (q \overleftarrow{\leadsto} P) \leadsto q \leadsto \Vee P = 1$$

Bewijs.

$$
\begin{array}{lll}
 & \langle \text{Lemma 8} \rangle & q \curlywedge x \in \mathcal{D}\, P \curlywedge (q \leadsto P\, x) \leadsto \Vee P \\
\approx & \langle \mathrm{SH}{\curlywedge}/{\leadsto} \rangle & x \in \mathcal{D}\, P \curlywedge (q \leadsto P\, x) \leadsto q \leadsto \Vee P \\
\approx & \langle \mathrm{SH}{\curlywedge}/{\leadsto} \rangle & x \in \mathcal{D}\, P \leadsto (q \leadsto P\, x) \leadsto q \leadsto \Vee P \\
\approx & \langle \text{Def. } \overrightarrow{\cdot} \rangle & x \in \mathcal{D}\, ((q \overrightarrow{\leadsto} P) \leadsto q \leadsto \Vee P) \leadsto (q \overrightarrow{\leadsto} P) \leadsto q \leadsto \Vee P \\
\leadsto & \langle \mathrm{FGEN} \rangle & \Wedge ((q \leadsto P\, x) \leadsto q \leadsto \Vee P) \\
\leadsto & \langle \mathrm{RD}{\leadsto}/{\Vee} \rangle & \Vee (q \overleftarrow{\leadsto} P) \leadsto q \leadsto \Vee P
\end{array}
$$

□

Het gebruikte lemma in het vorige bewijs is:

Lemma 8.

$$q \curlywedge x \in \mathcal{D}\, P \curlywedge (q \rightsquigarrow P\, x) \rightsquigarrow \Vee P = 1$$

Bewijs.

$$\begin{aligned} q \curlywedge x \in \mathcal{D}\, P \curlywedge (q \rightsquigarrow P\, x) \quad &\rightsquigarrow \langle \text{MP} \rangle \;\; x \in \mathcal{D}\, P \curlywedge P\, x \\ &\rightsquigarrow \langle \Vee\, \text{IN} \rangle \;\; \Vee P \end{aligned}$$

□

De laatste distributiviteitsregel vertoont een sterke gelijkenis met de rechtse distributiviteit van $\rightsquigarrow$ over $\Vee$, maar geldt voor $\Wedge$:

Stelling 56 (RD$\rightsquigarrow$/$\Wedge$ "Rechtsdistributiviteit $\rightsquigarrow$/$\Wedge$")**.**

$$\Vee (P \overleftarrow{\rightsquigarrow} q) \rightsquigarrow \Wedge P \rightsquigarrow q = 1$$

Bewijs.

$$\begin{array}{lcl} & \langle \text{lemma } 9 \rangle & x \in \mathcal{D}\, P \curlywedge (P\, x \rightsquigarrow q) \curlywedge \Wedge P \rightsquigarrow q \\ \approx & \langle \text{SH} \rangle & x \in \mathcal{D}\, P \rightsquigarrow (P\, x \rightsquigarrow q) \rightsquigarrow \Wedge P \rightsquigarrow q \\ \rightsquigarrow & \langle \text{Def. } \overleftarrow{\cdot} \rangle & x \in \mathcal{D}\, ((P \overleftarrow{\rightsquigarrow} q) \rightsquigarrow \Wedge P \rightsquigarrow q) \rightsquigarrow (P\, x \rightsquigarrow q) \rightsquigarrow \Wedge P \rightsquigarrow q \\ \rightsquigarrow & \langle \text{FGEN} \rangle & \Wedge ((P \overleftarrow{\rightsquigarrow} q) \rightsquigarrow \Wedge P \rightsquigarrow q) \\ \approx & \langle \text{RD}\rightsquigarrow/\Vee \rangle & \Vee (P \overleftarrow{\rightsquigarrow} q) \rightsquigarrow \Wedge P \rightsquigarrow q \end{array}$$

□

Het gebruikte lemma is:

Lemma 9.

$$x \in \mathcal{D}\, P \curlywedge (P\, x \rightsquigarrow q) \curlywedge \Wedge P \rightsquigarrow q = 1$$

Bewijs.

$$\begin{aligned} & x \in \mathcal{D}\, P \curlywedge (P\, x \rightsquigarrow q) \curlywedge \Wedge P \\ &\quad \rightsquigarrow \langle \text{FINS} \rangle \;\; x \in \mathcal{D}\, P \curlywedge (P\, x \rightsquigarrow q) \curlywedge (x \in \mathcal{D}\, P \rightsquigarrow P\, x) \\ &\quad \rightsquigarrow \langle \text{FMP} \rangle \;\; (P\, x \rightsquigarrow q) \curlywedge P\, x \\ &\quad \rightsquigarrow \langle \text{FMP} \rangle \;\; q \end{aligned}$$

□

De volgende eigenschap geeft ons een soort veralgemeende modus ponens, die werkt met universele kwantoren. Merk op dat we in onze getypeerde vaaglogica nood hadden aan een extra voorwaarde om deze eigenschap te bewijzen. Een tegenvoorbeeld zonder deze voorwaarde is eenvoudig te vinden door twee vaagpredikaten te beschouwen met een ledige doorsnede, bijvoorbeeld $P = \{a \mapsto 1\}$ en $Q = \{b \mapsto 0\}$. Dan is $\bigwedge (P \mathbin{\widehat{\leadsto}} Q) = 1$ doordat het domein van $P \mathbin{\widehat{\leadsto}} Q$ ledig is. Maar $\bigwedge P = 1$ en $\bigwedge Q = 0$, waardoor de implicatie ongeldig wordt en we een tegenvoorbeeld hebben. Een tegenvoorbeeld wanneer P en Q niet-ledige doorsneden hebben kan men hier gemakkelijk uit afleiden.

Stelling 57 (ISO$\bigwedge/\leadsto$ "Isotonie $\bigwedge/\leadsto$")**.** *Voor $\mathcal{D}\,P = \mathcal{D}\,Q$ geldt:*

$$\bigwedge (P \mathbin{\widehat{\leadsto}} Q) \;\leadsto\; \bigwedge P \leadsto \bigwedge Q = 1$$

Bewijs. Ter afkorting laten we $X := \mathcal{D}\,P$, dus $\mathcal{D}\,Q = X$ en $\mathcal{D}\,(P \mathbin{\widehat{\leadsto}} Q) = X$.

$$\begin{array}{lccl}
\bigwedge (P \mathbin{\widehat{\leadsto}} Q) & \leadsto & \langle \text{FINS} \rangle & x \in \mathcal{D}\,(P \mathbin{\widehat{\leadsto}} Q) \leadsto (P \mathbin{\widehat{\leadsto}} Q)\,x \\
& \approx & \langle \text{Def. } \widehat{\cdot} \rangle & (x \in X) \leadsto P\,x \leadsto Q\,x \\
& \approx & \langle \text{SH}{\leadsto}/{\curlywedge} \rangle & P\,x \curlywedge (x \in X) \leadsto Q\,x \\
& \leadsto & \langle \text{Lemma 10,T}{\leadsto} \rangle & \bigwedge P \curlywedge (x \in X) \leadsto Q\,x \\
& \approx & \langle \text{SH}{\curlywedge}/{\leadsto} \rangle & \bigwedge P \leadsto (x \in X) \leadsto Q\,x \\
& \leadsto & \langle \text{FGEN} \rangle & \bigwedge P \leadsto \bigwedge Q
\end{array}$$

□

Het gebruikte lemma luidt:

Lemma 10.

$$(x \in \mathcal{D}\,P) \curlywedge \bigwedge P \;\leadsto\; P\,x \curlywedge (x \in \mathcal{D}\,P) = 1$$

Bewijs. Het bewijs volgt uit de instantiatie en de idempotentie van de conjunctie (ID$\wedge = a \wedge a = a$):

$$\begin{array}{ccl}
 & \langle \text{FINS} \rangle & \bigwedge P \leadsto (x \in \mathcal{D}\,P) \leadsto P\,x \\
\approx & \langle \text{SH}{\leadsto}/{\curlywedge} \rangle & \bigwedge P \curlywedge (x \in \mathcal{D}\,P) \leadsto P\,x \\
\approx & \langle \text{Eenh. } \curlywedge, \text{R}{\leadsto} \rangle & (\bigwedge P \curlywedge (x \in \mathcal{D}\,P) \leadsto P\,x) \curlywedge ((x \in \mathcal{D}\,P) \leadsto (x \in \mathcal{D}\,P)) \\
\leadsto & \langle \text{ME}{\leadsto} \rangle & \bigwedge P \curlywedge (x \in \mathcal{D}\,P) \curlywedge (x \in \mathcal{D}\,P) \;\leadsto\; (x \in \mathcal{D}\,P) \curlywedge P\,x \\
\approx & \langle {\curlywedge}\rceil\mathbb{B} = \wedge, \text{ID}\wedge \rangle & \bigwedge P \curlywedge (x \in \mathcal{D}\,P) \leadsto (x \in \mathcal{D}\,P) \curlywedge P\,x
\end{array}$$

□

Ook hiervan geven we nogmaals, ter vergelijking, een bewijs dat gebruikmaakt van de ordetheorie en niet van FGEN of FINS.

Bewijs. Stel wederom $\mathcal{D}\,P = X$, dan:

$$\begin{array}{rcll}
1 & \equiv & \langle \text{St. } \curlywedge\text{b} \rangle & \forall\, x : \mathcal{D}\,(P \mathbin{\widehat{\rightsquigarrow}} Q)\,.\, \curlywedge(P \mathbin{\widehat{\rightsquigarrow}} Q) \leq (P \mathbin{\widehat{\rightsquigarrow}} Q)\,x \\
 & \equiv & \langle \text{Uitwerk. } \widehat{\cdot} \rangle & \forall\, x : X\,.\, \curlywedge(P \mathbin{\widehat{\rightsquigarrow}} Q) \leq P\,x \rightsquigarrow Q\,x \\
 & \equiv & \langle \text{SH}\leq/\rightsquigarrow \rangle & \forall\, x : X\,.\, P\,x \leq \curlywedge(P \mathbin{\widehat{\rightsquigarrow}} Q) \rightsquigarrow Q\,x \\
 & \Rightarrow & \langle \text{St. } \curlywedge\text{b, T}\leq \rangle & \forall\, x : X\,.\, \curlywedge P \leq \curlywedge(P \mathbin{\widehat{\rightsquigarrow}} Q) \rightsquigarrow Q\,x \\
 & \equiv & \langle \text{GC} \rangle & \forall\, x : X\,.\, \curlywedge P \curlywedge \curlywedge(P \mathbin{\widehat{\rightsquigarrow}} Q) \leq Q\,x \\
 & \equiv & \langle \text{St. } \curlywedge \rangle & \curlywedge P \curlywedge \curlywedge(P \mathbin{\widehat{\rightsquigarrow}} Q) \leq \curlywedge Q \\
 & \equiv & \langle \text{Comm. } \curlywedge\text{, GC} \rangle & \curlywedge(P \mathbin{\widehat{\rightsquigarrow}} Q) \leq \curlywedge P \rightsquigarrow \curlywedge Q \\
 & \equiv & \langle \text{Eq. } \leq/\rightsquigarrow \rangle & \curlywedge(P \mathbin{\widehat{\rightsquigarrow}} Q) \rightsquigarrow \curlywedge P \rightsquigarrow \curlywedge Q = 1
\end{array}$$

□

De allerlaatste stelling laat ons toe om twee universele vaagkwantoren samen te voegen tot één vaagkwantor over een vaagconjunctie. In toepassingen zoals vaagdatabanken kan deze eigenschap gebruikt worden om enkele axioma's (die veeleer rekenregels zijn) over functionele afhankelijkheden te bewijzen, in plaats van ze te poneren als axioma.

Stelling 58 (ME$\curlywedge$ "Ontmoeting met $\curlywedge$")**.**

$$\curlywedge P \curlywedge \curlywedge Q \rightsquigarrow \curlywedge(P \mathbin{\widehat{\curlywedge}} Q) = 1$$

Bewijs.

$$\begin{array}{lcll}
\curlywedge P \curlywedge \curlywedge Q & & & \\
 & \rightsquigarrow & \langle \text{FINS} \rangle & (x \in \mathcal{D}\,P \rightsquigarrow P\,x) \curlywedge (x \in \mathcal{D}\,Q \rightsquigarrow Q\,x) \\
 & \rightsquigarrow & \langle \text{ME}\curlywedge/\rightsquigarrow \rangle & x \in \mathcal{D}\,P \curlywedge x \in \mathcal{D}\,Q \rightsquigarrow P\,x \curlywedge Q\,x \\
 & \approx & \langle \text{Def. } \widehat{\cdot} \rangle & x \in \mathcal{D}\,(P \mathbin{\widehat{\curlywedge}} Q) \rightsquigarrow P\,x \curlywedge Q\,x \\
 & \rightsquigarrow & \langle \text{FGEN, Def. } \widehat{\cdot} \rangle & \curlywedge(P \mathbin{\widehat{\curlywedge}} Q)
\end{array}$$

□

Dit besluit onze vaagpredikatenlogica. We geven nog een overzicht van de ingevoerde rekenregels en bespreken in het volgende hoofdstuk onze conclusies omtrent de vaagcalculationele stijl.

Afkorting	**Regel**
FINS	$\text{⩚}\, P \rightsquigarrow x \in \mathcal{D}\, P \rightsquigarrow P\, x$
FGEN	$(x \in \mathcal{D}\, P \rightsquigarrow P\, x = 1) \Rightarrow (\text{⩚}\, P = 1)$
⩛ IN	$x \in \mathcal{D}\, P \curlywedge P\, x \rightsquigarrow \text{⩛}\, P$
LD$\rightsquigarrow/\text{⩚}$	$\text{⩚}\, (q \overset{\rightharpoonup}{\rightsquigarrow} P) \approx (q \rightsquigarrow \text{⩚}\, P)$
RD$\rightsquigarrow/\text{⩛}$	$\text{⩚}\, (P \overset{\leftharpoonup}{\rightsquigarrow} q) \approx \text{⩛}\, P \rightsquigarrow q$
LD$\rightsquigarrow/\text{⩛}$	$\text{⩛}\, (q \overset{\leftharpoonup}{\rightsquigarrow} P) \rightsquigarrow q \rightsquigarrow \text{⩛}\, P$
RD$\rightsquigarrow/\text{⩚}$	$\text{⩛}\, (P \overset{\leftharpoonup}{\rightsquigarrow} q) \rightsquigarrow \text{⩚}\, P \rightsquigarrow q$
ISO$\text{⩚}\,/\rightsquigarrow$	Als $\mathcal{D}\, P = \mathcal{D}\, Q$: $\text{⩚}\, (P \widehat{\rightsquigarrow} Q) \;\rightsquigarrow\; \text{⩚}\, P \rightsquigarrow \text{⩚}\, Q$
ME⩚	$\text{⩚}\, P \curlywedge \text{⩚}\, Q \rightsquigarrow \text{⩚}\, (P \mathbin{\widehat{\curlywedge}} Q)$

Tabel 4.2: Overzicht van de ingevoerde rekenregels

Hoofdstuk 5

Conclusies

5.1 Conclusies

We hebben in dit afstudeerwerk onderzocht hoe we de calculationele stijl voor de klassieke formele logica kunnen overbrengen naar de vaaglogica. Dit omdat de huidige manier van werken voornamelijk gebaseerd is op ordetheorie en interpretaties van formules en niet zozeer op het louter syntactisch manipuleren van kwantoren en operatoren uit de vaaglogica, zoals men ondermeer gewend is in de klassieke calculationele logica. Uit dit onderzoek kwam naar voor dat we enkel voor transitieve implicatoren een dergelijke stijl kunnen opbouwen, aangezien enkel transitieve operatoren als een verbindingselement kunnen gebruikt worden in een bewijs. Een notationele verandering die we hebben doorgevoerd en die nauw aansluit bij de mogelijkheid om te redeneren door syntactische manipulatie, is om infix-operatoren te gebruiken, in plaats van prefix-operatoren. Dit laatste laat, door het verminderd aantal haakjes en de positionering van operatoren ten opzichte van hun argumenten, beter toe om de structuur van formules te zien en zodoende de symbolen het verdere verloop van het bewijs te laten gidsen.

We hebben concreet eerst een vaagpropositielogica opgebouwd, startend van een residuele implicator en een continue t-norm. De andere operatoren werden zodanig gekozen dat ze vastgelegd zijn van zodra we de t-norm hebben vastgelegd. Door middel van verscheidene voorbeelden in de bewijsvoeringen van bruikbare stellingen, hebben we aangetoond dat een calculationele vaagpropositielogica elegant werkt en geen nood heeft aan een ordetheoretische aanpak om eigenschappen aan te tonen.

Na de opbouw van de vaagpropositielogica hebben we gedemonstreerd hoe we een calculationele vaagpredikatenlogica kunnen ontwikkelen, met behulp van de vaaginstantiatie en de vaaggeneralisatie. We hebben ons voornamelijk gefocust op de opbouw van de basisregels, waardoor we, in vergelijking met ordetheoretische bewijzen, niet steeds het meest elegante bewijs hebben kunnen voortbrengen. De reden hiervoor is dat onze vaagpredikatenlogica nog in de steigers staat, en we dus nog niet alle handige basisregels voor vaagkwantoren tot onze beschikking hebben om equationeel te redeneren. Ook in de klassieke logica zijn bewijzen met instantiatie en generalisatie echter opstapjes naar een meer equationele structuur, waardoor we vermoeden dat, eenmaal we over meer basisregels voor vaagkwantoren beschikken, we ook in de vaaglogica elegante equationele bewijzen kunnen construeren.

We kunnen tot slot concluderen dat onze calculationele vaaglogica de volgende voordelen heeft tegenover een ordetheoretische aanpak: ze maakt enkel gebruik van vaaglogische operatoren, maakt een abstractie van de onderliggende ordestructuur en biedt een sterke analogie met de klassieke logica. Dit laatste heeft, naast een praktisch voordeel voor onderzoekers in vaaglogische domeinen, ook een pedagogisch voordeel: studenten die met de calculationele klassieke logica overweg kunnen, kunnen snel overweg met de calculationele vaaglogica.

5.2 Verder onderzoek

We hebben in de vorige hoofdstukken reeds verschillende ideeën geponeerd voor verder onderzoek. We zetten deze hier even op een rijtje.

5.2.1 Fundamentele richtingen

Een eerste mogelijke richting is om te onderzoeken hoe we voor andere tralies dan de tralie $\leq][0,1]$ een dergelijke calculationele stijl kunnen opbouwen. In de praktijk maakt men immers gebruik van vaagpredikaten die elementen niet afbeelden op $[0,1]$, maar op een bepaalde tralie. Als de calculationele vaaglogica in het praktisch gebruik wenst door te dringen, moeten we dan ook voor dergelijke tralies een calculationele vaaglogica ontwikkelen.

Een tweede richting is nagaan of we deze stijl kunnen behouden als we de beperking op de t-norm afzwakken naar links-continue t-normen, of overgaan op andere soorten van t-normen. Links-continue t-normen worden immers vaak gebruikt in de praktijk en beschikken over een algebraïsatie (MTL-algebra), zodat het allicht mogelijk is om de calculationele vaaglogica uit te breiden naar deze structuur.

Een derde richting is om meer rekenregels te ontwikkelen en zodoende een “bibliotheek” van regels op te bouwen, zodat we equationeel kunnen redeneren en beknoptere bewijzen neerschrijven. Tevens is een dergelijke bibliotheek broodnodig bij dagelijks gebruik van deze stijl. Eveneens zou een echte, doorzoekbare, online bibliotheek van rekenregels enorm handig zijn bij het dagelijks gebruik van deze stijl.

Deze richtingen waren allemaal veeleer fundamentele richtingen, we hebben echter nog een paar ideeën voor meer toegepast onderzoek.

5.2.2 Toegepaste richtingen

Een eerste toegepaste richting is om na te gaan in hoeverre ons vermoeden (waar is) dat we, nadat we de rekenregels tot onze beschikking hebben, de equationele stijl kunnen gebruiken. We hebben reeds beargumenteerd waarom we dit vermoeden, maar dit moet uiteraard bevestigd worden.

Een tweede toegepaste richting is om een implementatie van deze logica te construeren in een automatisch bewijsvoeringsprogramma, zoals Isabelle/Isar, HOL, PVS, etc. Voor het praktisch gebruik is het immers handig wanneer men kan steunen op computergeverifieerde of computergegenereerde bewijsvoering. Het gebruik van een calculationele stijl als uitvoer in zo’n bewijs garandeert dan weer een goed leesbaarheid voor mensen. Een implementatie van de calculationale vaaglogica heeft dan bovendien als groot voordeel dat we ze snel kunnen inbedden in een implementatie voor de klassieke logica, of vice versa (wanneer we de klassieke logica als een speciaal geval van de vaaglogica beschouwen kunnen we deze snel inbedden in een implementatie voor de vaaglogica).

Bibliografie

[Bac02] Roland Backhouse. *Galois Connections (Programming algebra course)*. School of Computer Science and Information Technology, University of Nottingham, 3 December 2002. `http://www.cs.nott.ac.uk/~rcb/G53PAL/slides/02Lect7.pdf`.

[BB] Kevin Backhouse and Roland Backhouse. Logical relations and galois connections. *CiteSeer.IST – scientific digital library.* `http://citeseer.ist.psu.edu/backhouse02logical.html`.

[Bou03] Raymond Boute. Concrete generic functionals: Principles, design and applications. *In: Jeremy Gibbons and Johan Jeuring, eds., Generic Programming*, pages 89–119, 2003.

[Bou05a] Raymond Boute. *Basiswiskunde voor computerwetenschappen.* cursustekst UGent, 2005. te vinden op `http://www.funmath.be`.

[Bou05b] Raymond Boute. *Formal logic for practical use – A calculational approach.* cursustekst UGent, 2005. te vinden op `http://www.funmath.be`.

[Bou05c] Raymond Boute. Formal methods as a unifying basis for electrical and computer engineering. *Tutorial 14 at the Formal Methods Conference (FM05), Newcastle upon Tyne, UK*, Juli 2005. Te vinden op `http://www.funmath.be`.

[Bou05d] Raymond Boute. Functional declarative language design and predicate calculus: a practical approach. *ACM Transactions on Programming Languages and Systems*, 27:988–1047, September 2005.

[Dij90] Edsger W. Dijkstra. How computing science created a new mathematical style. *EWD Archive, University of Texas at Austin*, March 1990.

[Dij96] Edsger W. Dijkstra. A somewhat open letter to David Gries. *EWD Archive, University of Texas at Austin*, January 1996. circulated privately.

[Dij98] Edsger W. Dijkstra. A little bit of lattice theory. *EWD Archive, University of Texas at Austing*, January 1998. circulated privately.

[eoP97] Stanford encyclopedia of Philosophy. Sorites paradox, 1997. `http://plato.stanford.edu/entries/sorites-paradox/`.

[Glö] Ingo Glöckner. An axiomatic theory of fuzzy quantifiers in natural languages. *CiteSeer.IST – scientific digital library.* `http://citeseer.ist.psu.edu/474386.html`.

[GS93] David Gries and Fred B. Schneider. *A logical approach to discrete math.* Springer-Verlag New York, Inc., New York, NY, USA, 1993.

[Háj98] Petr Hájek. *Metamathematics of fuzzy logic.* Kluwer Academic publishers – Trends in logic, 1998.

[Ker91] Etienne E. Kerre. *Introduction to the basic principles of fuzzy set theory and some of its applications.* Communication and Cognition, Gent, Belgium, 1991.

[Ker06] Etienne E. Kerre. *Vaagheids- en onzekerheidsmodellen.* cursustekst UGent, 2006.

[Lam02] Leslie Lamport. *Specifying Systems: The TLA+ Language and Tools for Hardware and Software Engineers.* Addison-Wesley Longman Publishing Co., Inc., Boston, MA, USA, 2002.

[Oli05] José N. Oliveira. First steps in pointfree functional dependency theory. *DI/UM, Universidade do Minho*, 2005. Draft of paper in preparation.

[Qui69] Willard V.O. Quine. *Set Theory and its logic.* Harvard University Press, 1969.

[Sto81] Joseph E. Stoy. *Denotational Semantics: The Scott-Strachey Approach to Programming Language Theory.* MIT Press, Cambridge, MA, USA, 1981.

[Str05] Umberto Straccia. A fuzzy description logic for the semantic web. *CiteSeer.IST – scientific digital library*, 2005.

[Zad65] Lotfi A. Zadeh. Fuzzy sets. *Information and Control*, 8(3):338–353, June 1965.

Laagste Prioriteit	**...**				**...**	**Hoogste Prioriteit**
$\equiv$	$=$	$\approx$	$\leq$	$\rightsquigarrow$	$\curlywedge, \curlyvee, \wedge, \vee$	$\sim, \neg$

Tabel 1: Overzicht van de operator-precedenties (stijgende volgorde)

Abstractie-macro's	
$e \mid z : X \wedge p$	$(e \mid z : X \wedge p) = (z : X \wedge p \,.\, e)$
$z : X \mid p$	$(z : X \mid p) = (z : X \wedge p \,.\, z)$
Operatoren voor constante functies (constante en lege functie, singleton, één-puntsregel)	
$^\bullet$	$X^\bullet e = x : X \,.\, e$
ε	$\varepsilon = \emptyset^\bullet e$
ι	$y \in \iota\, x \equiv y = x$
$\mapsto$	$d \mapsto e = \iota\, d^\bullet e$
Operatoren van functies naar verzamelingen (domein, range)	
$\mathcal{D}$	Axiomatisch gedefinieerd voor elke functie (in abstracties en axioma voor $\rightarrow$)
$\mathcal{R}$	$y \in \mathcal{R}\, f \equiv \exists\, x : \mathcal{D}\, f \,.\, fx = y$ (als f een abstractie is schrijven we $\mathcal{R}\, f$ als $\{f\}$
Bdom	$\mathsf{Bdom}\, f = \{\, x : \mathcal{D}\, f \mid \forall\, y : \mathcal{D}\, f \,.\, f\, x = f\, y \Rightarrow x = y \,\}$
Bran	$\mathsf{Bran}\, f = \{\, f\, x \mid x : \mathsf{Bdom}\, f \,\}$
fam	$f \in \mathsf{fam}\, Y \equiv \forall\, x : \mathcal{D}\, f \,.\, fx \in Y$
$\rightarrow$	$f : X \rightarrow Y \equiv \mathcal{D}\, f = X \wedge \forall\, x : \mathcal{D}\, f \cap X \,.\, fx \in Y$
Functietransformeerders met 1 functieargument (restrictie, filter, inverse)	
$\rceil$	$f \rceil X = x : \mathcal{D}\, f \cap X \,.\, fx$ (merk op: $f \rceil X \in \mathcal{D}\, f \cap X \rightarrow \mathcal{R}\, f$)
$\downarrow$	$f \downarrow P = f \rceil (\mathcal{D}\, f \downarrow P)$, met $\downarrow$ voor verzamelingen: $X \downarrow P = \{\, x : X \cap \mathcal{D}\, P \mid P\, x \,\}$
$\_^-$	$f^- \in \mathsf{Bran} \rightarrow \mathsf{Bdom}\, f$ en $\forall\, x : \mathsf{Bdom}\, f \,.\, f^-(f\, x) = x$
Functietransformeerders met 2 functieargumenten (compositie)	
$\circ$	$f \circ g = x : \mathcal{D}\, g \wedge g\, x \in \mathcal{D}\, f \,.\, f(g\, x)$
Directe uitbreidingsoperatoren (voor een operator g en een infix operator $\star$)	
$\overline{}$	$\overline{g}\ f = g \circ f$
$\widehat{}$	$f \mathbin{\widehat{\star}} g = (\star) \circ (f, g)^T$ $(= x : \mathcal{D}\, f \cap \mathcal{D}\, g \wedge (fx, g\, x) \in \mathcal{D}\,(\star) \,.\, fx \star g\, x)$
$\overleftharpoon{}$	$f \mathbin{\overleftharpoon{\star}} x = f \mathbin{\widehat{\star}} (\mathcal{D}\, f^\bullet x)$ (voor willekeurige x en f)
$\overrightharpoon{}$	$x \mathbin{\overrightharpoon{\star}} f = (\mathcal{D}\, f^\bullet x) \mathbin{\widehat{\star}} f$ (voor willekeurige x en f)

Tabel 2: Operatoren uit het Funmath-formalisme

Stellingen uit de ordetheorie	
GG 1	$x = y \equiv \forall\, z : X \,.\, z \preceq x \equiv z \preceq y$
GG 2	$x = y \equiv \forall\, z : X \,.\, x \preceq z \equiv y \preceq z$
GO 1	$x \preceq y \equiv \forall\, z : X \,.\, z \preceq y \Rightarrow z \preceq y$
GO 2	$x \preceq y \equiv \forall\, z : X \,.\, y \preceq z \Rightarrow x \preceq z$
St. $\bigvee$	$\forall\, f : \mathsf{fam}\,[0,1] \,.\, \forall\, y : [0,1] \,.\, \bigvee f \leq y \equiv \forall\, x : \mathcal{D}\, f \,.\, f\, x \leq y$
St. $\bigwedge$	$\forall\, f : \mathsf{fam}\,[0,1] \,.\, \forall\, y : [0,1] \,.\, y \leq \bigwedge f \equiv \forall\, x : \mathcal{D}\, f \,.\, y \leq f\, x$
St. $\bigvee$ b	$\forall\, f : \mathsf{fam}\,[0,1] \,.\, \forall\, x : \mathcal{D}\, f \,.\, f\, x \leq \bigvee f$
St. $\bigwedge$ b	$\forall\, f : \mathsf{fam}\,[0,1] \,.\, \forall\, x : \mathcal{D}\, f \,.\, \bigwedge f \leq f\, x$
Refl. $\leq$	$a \leq a \equiv 1$
0 kl. elt.	0 is het kleinste element van de tralie $\leq \rceil [0,1]$
1 gr. elt.	1 is het grootste element van de tralie $\leq \rceil [0,1]$
Stellingen uit de vaagpredikatenlogica	
FINS	$\bigwedge P \rightsquigarrow x \in \mathcal{D}\, P \rightsquigarrow P\, x$
FGEN	$(x \in \mathcal{D}\, P \rightsquigarrow P\, x = 1) \Rightarrow (\bigwedge P = 1)$
$\bigvee$ IN	$x \in \mathcal{D}\, P \curlywedge P\, x \rightsquigarrow \bigvee P$
LD$\rightsquigarrow$/$\bigwedge$	$\bigwedge (q \overrightharpoon{\rightsquigarrow} P) \approx (q \rightsquigarrow \bigwedge P)$
RD$\rightsquigarrow$/$\bigvee$	$\bigwedge (P \overleftharpoon{\rightsquigarrow} q) \approx \bigvee P \rightsquigarrow q$
LD$\rightsquigarrow$/$\bigvee$	$\bigvee (q \overleftharpoon{\rightsquigarrow} P) \rightsquigarrow q \rightsquigarrow \bigvee P$
RD$\rightsquigarrow$/$\bigwedge$	$\bigvee (P \overleftharpoon{\rightsquigarrow} q) \rightsquigarrow \bigwedge P \rightsquigarrow q$
ISO$\bigwedge$/$\rightsquigarrow$	Als $\mathcal{D}\, P = \mathcal{D}\, Q$: $\bigwedge (P \mathbin{\widehat{\rightsquigarrow}} Q) \ \rightsquigarrow\ \bigwedge P \rightsquigarrow \bigwedge Q$
ME$\bigwedge$	$\bigwedge P \curlywedge \bigwedge Q \rightsquigarrow \bigwedge (P \mathbin{\widehat{\curlywedge}} Q)$
Extra stellingen die voorkomen en uit andere werken komen	
R$\Rightarrow$ of Refl. $\Rightarrow$	$x \Rightarrow x \equiv 1$
W$\Rightarrow$	$x \Rightarrow y \Rightarrow x$
Trading $\forall$	$\forall\, x : \mathcal{D}\, P \wedge Q \,.\, P\, x \equiv \forall\, x : \mathcal{D}\, P \,.\, Q\, x \Rightarrow P\, x$
SH$\Rightarrow$	$x \Rightarrow y \Rightarrow z \equiv y \Rightarrow x \Rightarrow z$
MP	$x \wedge (x \Rightarrow y) \Rightarrow y$
Eenh. $\wedge$	$1 \wedge x \equiv x$
W$\equiv$	$x \equiv y \Rightarrow x \Rightarrow y$
Refl. $\equiv$	$x \equiv x \equiv 1$
Refl. $=$	$x = x \equiv 1$
Instant. $\forall$	$\forall\, P \Rightarrow x \in \mathcal{D}\, P \Rightarrow P\, x$
Veralg. $\forall$	$x : \mathcal{D}\, P \Rightarrow P\, x \vdash \forall\, P$
Eig. $\vee$	$z \leq (x \vee y) \equiv (z \leq x) \wedge (z \leq y)$
Distrib. $\vee$/$\forall$	$\forall\, (P \overleftharpoon{\vee} q) \equiv \forall\, P \vee q$

Stellingen uit de vaagpropositielogica	
Comm. $\curlywedge$	$a \curlywedge b = b \curlywedge a$
Assoc. $\curlywedge$	$a \curlywedge (b \curlywedge c) = (a \curlywedge b) \curlywedge c$
Eenh. $\curlywedge$	$a \curlywedge 1 = a$
Mon. $\curlywedge$	$(a \leq b) \wedge (c \leq d) \Rightarrow (a \curlywedge c) \leq (b \curlywedge d)$
Zero. $\curlywedge$	$a \curlywedge 0 = 0$
Expl. Def. $\rightsquigarrow$	$x \rightsquigarrow y = \bigvee z : [0,1] \mid x \curlywedge z \leq y$
GC of Impl. Def. $\rightsquigarrow$	$z \leq x \rightsquigarrow y \equiv z \curlywedge x \leq y$
SH$\leq/\rightsquigarrow$	$x \leq y \rightsquigarrow z \equiv y \leq x \rightsquigarrow z$
SH$\Rightarrow/\rightsquigarrow$	$\forall p : [0,1] \,.\, b : \mathbb{B} \,.\, b \Rightarrow (p = 1) \equiv b \rightsquigarrow p = 1$
Eq. $\leq/\rightsquigarrow$	$x \leq y \equiv (x \rightsquigarrow y) = 1$
Eenh. $\curlywedge$	$(1 \rightsquigarrow x) = x$
St 15	$x \geq y \Rightarrow x \curlywedge (x \rightsquigarrow y) = y$
Mon. Cons. $\rightsquigarrow$	$(b \leq c) \Rightarrow (a \rightsquigarrow b \leq a \rightsquigarrow c)$
Antiton. Antec. $\rightsquigarrow$	$(c \leq d) \Rightarrow (d \rightsquigarrow a \leq c \rightsquigarrow a)$
FMP	$x \curlywedge (x \rightsquigarrow y) \rightsquigarrow y$
SH$\rightsquigarrow$	$x \rightsquigarrow y \rightsquigarrow z = y \rightsquigarrow x \rightsquigarrow z$
T$\rightsquigarrow$	$(x \rightsquigarrow y) \rightsquigarrow (y \rightsquigarrow z) \rightsquigarrow (x \rightsquigarrow z)$
R$\rightsquigarrow$	$x \rightsquigarrow x$
W$\rightsquigarrow$	$x \rightsquigarrow y \rightsquigarrow x$
SH$\curlywedge/\rightsquigarrow$	$x \rightsquigarrow y \rightsquigarrow z = x \curlywedge y \rightsquigarrow z$
W$\curlywedge$	$x \curlywedge y \rightsquigarrow x$
AC$\curlywedge$	$x \rightsquigarrow y \rightsquigarrow x \curlywedge y$
I$\rightsquigarrow/\curlywedge$	$(x \rightsquigarrow y) \rightsquigarrow (x \curlywedge z) \rightsquigarrow (y \curlywedge z)$
EFMP	$(x \rightsquigarrow y) \curlywedge x \curlywedge z \rightsquigarrow y \curlywedge z$
ME$\rightsquigarrow$	$(x \rightsquigarrow y) \curlywedge (z \rightsquigarrow u) \rightsquigarrow (x \curlywedge z) \rightsquigarrow (y \curlywedge u)$
Def. $\approx$	$a \approx b = (a \rightsquigarrow b) \curlywedge (b \rightsquigarrow a)$
R$\approx$	$x \approx x$
S$\approx$	$(x \approx y) \rightsquigarrow (y \approx x)$
T$\approx$	$(x \approx y) \curlywedge (y \approx z) \rightsquigarrow (x \approx z)$
W$\approx$	$(x \approx y) \rightsquigarrow (x \rightsquigarrow y)$
I$\approx$	$(x \approx y) \rightsquigarrow (x \curlywedge z \approx y \curlywedge z)$
I$\approx/\rightsquigarrow$	$x \approx y \rightsquigarrow x \rightsquigarrow z \approx y \rightsquigarrow z$

Vervolg van de stellingen uit de vaagpropositielogica	
Def. $\sim$	$\sim x = x \rightsquigarrow 0$
Dal. $\sim$	$(a \leq b) \Rightarrow (\sim b \leq \sim a)$
DN	$x \rightsquigarrow \sim (\sim x)$
WCP$\rightsquigarrow/\sim$	$(x \rightsquigarrow y) \rightsquigarrow (\sim y \rightsquigarrow \sim x)$
Def. $\curlyvee$	$a \curlyvee b = \sim (\sim a \curlywedge \sim b)$
Comm. $\curlyvee$	$a \curlyvee b = b \curlyvee a$
Eénh. $\curlyvee$	$a \curlyvee 0 = \sim (\sim a)$
Zero $\curlyvee$	$a \curlyvee 1 = 1$
Mon. $\curlyvee$	$(a \leq b) \wedge (c \leq d) \Rightarrow (a \curlyvee c) \leq (b \curlyvee d)$
WDN$\curlyvee$	$\sim (\sim x) \rightsquigarrow x \curlyvee y$
W$\curlyvee$	$x \rightsquigarrow x \curlyvee y$